Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО КОНКУРСНОГО ЕКЗАМЕНУ З МАТЕМАТИКИ В УФМЛ КУ

Навчально-методичний посібник

Київ - 2008

УДК 373.545

Збірник задач і вправ для підготовки до конкурсного екзамену з математики в УФМЛ КУ. Навч.-метод. посібник / Упорядн. Д.А. Номіровський. – К.: УФМЛ КУ, 2008. – 52 с.

Рецензенти:

Б.В. Рубльов, доктор фізико-математичних наук, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка

М.С. Якір, Заслужений вчитель України, кавалер орденів "За заслуги" III і II ступенів, вчитель математики Києво-Печерського ліцею №171 "Лідер"

Наведено варіанти завдань та розв'язки конкурсного екзамену з математики, що пропонувалися протягом останніх років при вступі до Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кожний варіант супроводжується тренувальним набором задач, до яких наведено відповіді.

Для учнів 7-10 класів, абітурієнтів, учителів математики.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та педагогічною радою УФМЛ КУ 12 червня 2008 року

1 Про УФМЛ КУ

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка — це унікальний навчальний заклад, де збираються 300 талановитих дітей зі всіх регіонів України.

Ліцей — шанс отримати знання високого рівня з фізики, математики, хімії та інформатики, а через три роки стати студентом провідного ВУЗу України — Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ліцей було засновано у 1963 році. За ці роки його закінчили біля п'яти тисяч випускників, частина з яких присвятила своє життя науці, інші змогли вдало реалізувати себе в різноманітних сферах праці.

За останні 10 років усі випускники ліцею стали студентами ВУЗів, з них 90% — студентами Київського університету. Крім цього, на Всеукраїнських олімпіадах з математики, фізики, хімії та інформатики УФМЛ представлений окремими командами, які постійно виборюють призові місця.

Учні ліцею кожного року входять до складу збірних команд України на Міжнародні олімпіади з математики, фізики, хімії та інформатики. Лише за роки незалежності України 57 учнів ліцею стали переможцями Міжнародних, а більше 500 — Всеукраїнських олімпіад.

Вчаться у ліцеї з 9 по 11 клас. Учні 11-х класів ліцею мають змогу отримати право на вступ на факультети природничих наук Київського університету за співбесідою.

Мова навчання у ліцеї — українська, іноземна — англійська.

До послуг ліцеїстів 2 кабінети комп'ютерної техніки, інтернет, численні лабораторії, бібліотека з читальним залом, актовий зал, 2 спортивних зали, басейн університету.

Навчання, п'ятиразове харчування та проживання у ліцеї безкоштовне.

2 Правила прийому до УФМЛ КУ

1. Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка (УФМЛ) працює у складі 9-11 класів і забезпечує одержання учнями середньої освіти, поглибленої підготовки з природничих дисциплін, сприяє творчому розвитку інтересів та здібностей учнів.

2. До УФМЛ щорічно проводиться прийом учнів у 9-і класи. Перевага надається абітурієнтам, здібності яких не можуть у достатній мірі розвиватись в умовах, де знаходяться учні (діти з багатодітних сімей, із сільської місцевості, робітничих селищ; діти, що залишились без опіки батьків).

3. При потребі, проводиться добір учнів у 10-і, 11-і класи з числа учасників IV етапу Всеукраїнських предметних олімпіад з математики, фізики, хімії або інформатики, які зараховуються без екзаменів.

4. Для проведення прийому учнів до ліцею створюється постійно діюча, періодично змінювана приймальна комісія, строк повноважень якої один навчальний

рік. Комісія створюється наказом директора УФМЛ. До складу комісії входять: голова — директор ліцею, заступник голови комісії, голови предметних комісій, члени предметних комісій, секретар комісії.

5. Приймальна комісія проводить попередній відбір, вступні конкурсні екзамени, виносить рішення про прийом учнів до ліцею, на основі якого директор ліцею видає наказ про зарахування. Також приймальна комісія протягом своєї діяльності поповнює банк екзаменаційних завдань з фізики, математики та хімії, створює програми вступних іспитів для абітурієнтів, розробляє і впроваджує матеріали для підготовки абітурієнтів.

6. Відбір талановитих дітей для навчання у ліцеї проводиться у два етапи. На першому етапі представники університету та ліцею на обласних предметних олімпіадах проводять агітаційну роботу, збирають адреси всіх учасників олімпіад — учнів 8-х класів. На цьому ж етапі, у разі можливості, в обласних засобах інформації поширюються оголошення про черговий набір до ліцею. Переможцям обласних олімпіад приймальною комісією розсилаються запрошення на вступні екзамени до ліцею.

7. Учасники обласних олімпіад (III етап Всеукраїнських олімпіад) з математики, фізики, хімії або інформатики, які отримали I диплом, а також учасники IV етапу Всеукраїнських олімпіад з математики, фізики, хімії або інформатики запрошуються на навчання без вступних екзаменів. Вказаним учням приймальною комісією розсилаються запрошення на навчання, у відповідь на які вони повинні повідомити комісію про свою згоду навчатись у ліцеї. Призери (II, III диплом) обласних олімпіад запрошуються на вступні екзамени до ліцею.

8. На другому етапі у червні місяці протягом тижня у м.Києві на базі ліцею відбуваються вступні екзамени.

9. До вступних екзаменів у 9-й клас ліцею допускається будь-який учень, що закінчив 8-й клас середньої школи і має бажання вчитися у ліцеї.

10. Під час проведення екзаменів (у разі наявності фінансових ресурсів) абітурієнтам викладачами ліцею та університету читаються лекції, проводяться різноманітні тестування.

11. Екзамени проводяться з фізики, математики та хімії. Екзамен з хімії має інформаційний характер і не впливає на результати конкурсу.

12. Витрати на проїзд абітурієнтів, витрати на проїзд та харчування осіб, які супроводжують абітурієнтів, відносяться на рахунок батьків та осіб, що їх замінюють.

13. За результатами екзаменів та дипломів відповідних олімпіад приймальна комісія приймає рішення про прийом абітурієнтів до ліцею.

3 Програма з математики для вступників в УФМЛ КУ

На екзамені з математики вступник до УФМЛ КУ повинен показати чіткі знання означень, математичних понять, формулювань правил, теорем, передбачених програмою, вміння доводити їх та застосовувати при розв'язуванні задач.

Для підготовки до екзамену з математики, який проводиться за програмою загальноосвітніх шкіл з алгебри і геометрії за 6, 7 і 8 класи, пропонуються такі питання.

1. Подільність цілих чисел. Ділення з остачею. Дільники і кратні натурального числа. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9 і 10.

2. Прості і складені числа. "Решето" Ератосфена. Розкладання чисел на прості множники. Спільні дільники кількох чисел. НСД кількох чисел та його знаходження. Спільне кратне кількох чисел. НСК кількох чисел та його знаходження.

3. Ціла і дробова частини числа. Десятковий дріб як частка від ділення натуральних чисел. Скінченні і нескінченні десяткові дроби. Періодичні десяткові дроби. Перетворення періодичного десяткового дробу у звичайний дріб.

4. Модуль числа, його геометричний зміст. Модуль суми, різниці, добутку та частки двох чисел. Розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять модуль.

5. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими та її дослідження. Геометрична інтерпретація розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Розв'язування задач на складання рівнянь та систем рівнянь.

6. Формули скороченого множення та їх застосування.

7. Функція, область визначення та множина значень функції. Способи задання функцій. Графік функції. Нулі функції та проміжки знакосталості. Функції $y = kx + b$ і $y = k/x$ та їх властивості, графіки. Функції $y = [x]$ (ціла частина числа x) і $y = \{x\}$ ($\{x\} = x-[x]$ — дробова частина числа $\{x\}$) та їх властивості, графіки. Степінь з натуральним показником і його властивості. Функції $y = x^2$ і $y = x^3$ та їх властивості, графіки.

8. Сумірні та несумірні відрізки. Несумірність діагоналі квадрата з його стороною. Десяткове вимірювання відрізків. Поняття про ірраціональне число. Загальні відомості про дійсні числа. Квадратний корінь. Знаходження найближчого значення квадратного кореня. Властивості квадратних коренів. Звільнення від ірраціональності у знаменниках виразів виду $\frac{a}{\sqrt{b}}$ та $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені. Функція $y = \sqrt{x}$, її властивості і графік.

9. Квадратні рівняння. Вивід формул для коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Пряма та обернена теореми Вієта. Розв'язування задач, які зводяться до квадратних рівнянь.

10. Числові нерівності та їх властивості. Почленне додавання і множення числових нерівностей. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним двох невід'ємних чисел. Застосування властивостей нерівностей до оцінки значень виразу.

11. Задача на побудову. Основні задачі на побудову: 1)побудувати трикутник за даними сторонами a, b, c; 2)відкласти від даної півпрямої в даній півплощині кут, що дорівнює даному куту; 3)побудувати бісектрису даного кута; 4)поділити даний відрізок навпіл; 5)через дану точку провести пряму, паралельну (перпендикулярну) до даної прямої. Побудова відрізків, заданих формулами: $a \pm b$; na; $\frac{a}{n}$; $\frac{ab}{c}$; $\sqrt{a^2 \pm b^2}$; $\sqrt{ab}$, де a, b, c — задані відрізки, n — натуральне число.

12. Трикутник, елементи трикутника, нерівність трикутника. Ознаки рівності трикутників. Рівнобедрений трикутник та його властивості. Визначні точки у трикутнику.

13. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Ознаки паралельності двох прямих на площині. Властивість кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною. Теорема про суму внутрішніх кутів трикутника. Залежність між зовнішніми і внутрішніми кутами трикутника. Сума внутрішніх кутів многокутника. Сума зовнішніх кутів многокутника, взятих по одному при кожній вершині.

14. Взаємне розміщення кола і прямої. Дотична до кола та її властивості. Взаємне розміщення двох кіл. Вписаний кут та його властивості. Коло, вписане у трикутник. Коло, описане навколо трикутника.

15. Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма. Окремі види паралелограмів: прямокутник, ромб, квадрат. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника та її властивості. Трапеція, елементи трапеції. Середня лінія трапеції та її властивості.

16. Скалярні і векторні величини. Поняття вектора. Колінеарні і рівні вектори. Додавання і віднімання векторів, правила трикутника і паралелограма. Множення вектора на число, його властивості. Проекція вектора на вісь. Кут між двома векторами. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.

17. Косинус, синус, тангенс і котангенс госторго кута прямокутного трикутника. Пряма та обернена теореми Піфагора. Метричні співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Відстань між двома точками, заданими координатами. Координати середини відрізка. Рівняння прямої і кола. Окремі види рівнянь прямої. Поняття про метод координат.

Підготував: Савченко Л.М.

4 Зразки варіантів письмового екзамену та тренувальні варіанти

Вступний екзамен з математики 1981 року

1. Для нумерації сторінок підручника використали 855 цифр. Скільки сторінок у підручнику?

2. Доведіть, що при $ab > 0$ виконується нерівність: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$. В яких випадках має місце знак рівності?

3. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = |x-1| + 5. \end{cases}$

4. Відстань між основами двох висот ромба $ABCD$, які проведені з вершини тупого кута B, дорівнює половині діагоналі AC. Знайдіть гострий кут ромба.

5. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершин.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1981 року

1. Зі старої книги випав шматок, що містить 137 аркушів (на кожному аркуші 2 сторінки). Остання сторінка має номер 280. Скільки цифр використано для нумерації сторінок цієї частини книги?

2. При яких значеннях x, y має місце нерівність: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leqslant -2$?

3. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} a = |b-1| - 3, \\ |b-1| = 5 - |a+3|. \end{cases}$

4. З вершини A гострого кута ромба $ABCD$ проведено висоти ромба (на продовження CB і CD). Виявилося, що AC ділиться у відношенні $1 : 3$ при перетині з відрізком, який з'єднує основи цих висот. Знайдіть тупий кут ромба.

5. На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено точки K і L так, що $AK : KB = 3 : 2$, $BL : LC = 1 : 2$. В якому відношенні відрізок CK ділиться при перетині з AL?

Вступний екзамен з математики 1984 року

1. Спростіть вираз: $\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}}$.

2. Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник. Знайдіть діагональ цього прямокутника, якщо сторони паралелограма дорівнюють x і y.

3. Обчисліть: $\left(\frac{131313}{242424} + \frac{721}{1236}\right)\left(\frac{131313}{242424} - \frac{721}{1236}\right)$.

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{\sqrt{(y-x)^2}}{\sqrt{x^2}} = 2$.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1984 року

1. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{ab}-a}{4\sqrt{ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$.

2. Знайдіть суму протилежних кутів чотирикутника, який утворюються при перетині бісектрис зовнішніх кутів трапеції.

3. Обчисліть: $\left(\frac{918}{1326}\right)^2 - 2\cdot\frac{141414}{393939}\cdot\frac{918}{1326}+\left(\frac{141414}{393939}\right)^2$.

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{\sqrt{4y^2}}{\sqrt{y^2+4xy+4x^2}}=1$.

Вступний екзамен з математики 1985 року

1. Нехай $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Обчисліть значення виразу: $f\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)$.

2. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{(xy-2x)\left(y^5-x^2y^3\right)}{(x^2y^2+y^4-2xy^3)(|x|-2)}=0$.

3. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 5x-ay-6=0, \\ 2x+6y+3=0 \end{cases}$ має такі розв'язки, що $x>0$, $y<0$?

4. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ так, що $MD=DC$ і $MA=MC$. Знайдіть кут між діагоналями цього прямокутника.

5. Кожну сторону прямокутного трикутника збільшили на 1. Який вид має одержаний трикутник: гострокутний, прямокутний чи тупокутний?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1985 року

1. Нехай $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$. Обчисліть значення виразу: $\frac{f\left(x^2\right)-1}{f(-x)+1}$.

2. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{(3-|y|)\left(x^3y^2-x^5\right)}{(x^4+x^2y^2+2yx^3)(xy+2y)}=0$.

3. При яких значеннях b система рівнянь $\begin{cases} 2x+2y+1=0, \\ bx-5y+2=0 \end{cases}$ має такі розв'язки, що $x<0$, $y>0$?

4. Точка M ділить сторону AB прямокутника $ABCD$ так, що $BM=MD$. Знайдіть відношення $DA:AM$, якщо $\angle ACD=30°$.

5. Кожну сторону деякого трикутника збільшили на 2 і отримали при цьому прямокутний трикутник. Який вид мав початковий трикутник: гострокутний, прямокутний чи тупокутний?

Вступний екзамен з математики 1986 року

1. Середини сторін рівнобічної трапеції послідовно з'єднані між собою. Який вид має утворений чотирикутник?

2. У прямокутній трапеції один з кутів дорівнює $135°$, середня лінія дорівнює 18, а основи відносяться як $1:8$. Знайдіть довжину найменшої сторони трапеції.

3. З вершини C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) провели бісектрису CL і медіану CM. Виявилося, що трикутник CLM рівнобедрений. Обчисліть гострі кути трикутника ABC.

4. Побудуйте на координатній площині графік функції:

$$y = \frac{x\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}} - \frac{4x - x^3}{x - 2} + \frac{25x^2 - 40x + 16}{4 - 5x}.$$

5. При яких значеннях a система $\begin{cases} ax^2 + xy = y - 2, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1986 року

1. Коли середини сторін деякого чотирикутника послідовно з'єднали між собою, то утворився прямокутник. Який вид мав початковий чотирикутник, якщо його протилежні сторони попарно паралельні?

2. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 40, а основи відносяться як $1:5$. Знайдіть висоту трапеції, якщо один з її кутів рівний $60°$.

3. З вершини C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) провели висоту CH і медіану CM. Виявилося, що трикутник CHM рівнобедрений. Обчисліть гострі кути трикутника ABC.

4. Побудуйте на координатній площині графік функції:

$$y = \frac{4 - x}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 16\sqrt{x^3}}{\sqrt{16x} - 1} - \frac{x^3 + 2x}{x}.$$

5. При яких значеннях b система $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ b(1 - y)^2 - xy = 2y - 6 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Вступний екзамен з математики 1987 року

1. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{3\sqrt{2} - 4} + \frac{1}{11 + 2\sqrt{30}} - \frac{1}{3\sqrt{2} + 4} + \frac{1}{11 - 2\sqrt{30}}$$

є раціональним числом.

2. Відомо, що x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 + ax + a - 1987 = 0$. При якому значенні a сума $x_1^2 + x_2^2$ приймає найменше значення?

3. У прямокутному трикутнику висота, проведена з прямого кута, у чотири рази менша гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

4. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, а N — середина CD. Доведіть, що прямі AM і AN ділять діагональ BD на три рівні частини.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1987 року

1. Доведіть, що значення виразу
$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{2\sqrt{12}-7}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}-\frac{1}{4\sqrt{3}+7}$$
є раціональним числом.

2. Відомо, що x_1, x_2 — корені рівняння $x^2-(a+1)x+2a^2-1987=0$. При якому значенні a сума $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ приймає найбільше значення?

3. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C=90°$) проведено медіану CM і бісектрису CL кута ACM. Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо $CL=LM$.

4. Середня лінія трикутника ABC перетинає медіану AM у точці P. На стороні BC позначили таку точку S, $BS:SC=1:3$. У якому відношенні AS ділить відрізок BP при перетині?

Вступний екзамен з математики 1988 року

1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях k вираз k^3+3k^2+2k ділиться на 6.

2. Побудуйте графік функції: $y=\sqrt{(1+\sqrt{x})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}$. Знайдіть всі такі значення x, що $y<2$.

3. Доведіть, що у чотирикутнику, описаному навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні між собою.

4. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1:2$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, якщо $MB=MD$.

5. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $x^2-x+a^2=0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2>2$?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1988 року

1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях k вираз k^3+3k^2-4k ділиться на 6.

2. Побудуйте графік функції: $y=\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^2+\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}$. Знайдіть всі такі значення x, що $y>2$.

3. Доведіть, що у трапеції, описаної навколо кола, середня лінія дорівнює півсумі бічних сторін.

4. Точка M ділить сторону CD прямокутника $ABCD$ так, що $AB=AM$. Знайдіть $\angle CBM$, якщо одна сторона прямокутника удвічі більша за іншу.

5. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 + 2x + a^2 = 0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $\frac{x_1^6}{x_2^2} + \frac{x_2^6}{x_1^2} > 2x_1^2 x_2^2$?

Вступний екзамен з математики 1989 року

1. Чи може один з катетів прямокутного трикутника дорівнювати радіусу описаного кола?

2. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 10 см, а сума кутів при меншій основі становить $270°$. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

3. Побудуйте на координатній площині графіки рівнянь:
$$\text{а) } \frac{y^2 - |x|}{y^2 - |x|} = 1, \qquad \text{б) } \sqrt{x^2 + y^2} = (\sqrt{y})^2 - x.$$

4. Чи існує таке двоцифрове число, що у два рази менше двоцифрового числа, кожна цифра якого на 2 більше деякої цифри даного числа?

5. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + (a+1)x + a - \frac{1}{2} = 0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $x_1^2 + x_2^2 < \frac{11}{4}$?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1989 року

1. При якій умові точка перетину двох серединних перпендикулярів лежить на третій стороні трикутника?

2. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 8 см, а кут між діагоналями становить $90°$. Знайдіть висоту трапеції.

3. Побудуйте на координатній площині графіки рівнянь:
$$\text{а) } \frac{|y| - x^2}{|y| - x^2} = 1, \qquad \text{б) } \sqrt{x^2 + y^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - y.$$

4. Чи існує таке двоцифрове число, що коли його першу цифру зменшити на кількість одиниць, а число одиниць подвоїти, то отримаємо число, яке менше даного удвічі?

5. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - (a-1)x - a - \frac{1}{2} = 0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $x_1^2 + x_2^2 > \frac{3}{4}$?

Вступний екзамен з математики 1990 року

1. На дузі півкола з центром O позначили точки A, C, B і D (саме у такому порядку). Хорди AB і CD кола перетинаються у точці M. Доведіть рівність: $\angle AMC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD)$.

2. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1:2$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, якщо $MB = MD$.

3. Обчисліть значення виразу: $\frac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

4. Відомо, що $ab \geqslant 0$. Доведіть нерівність: $\left(a^2-b^2\right)^2 \geqslant (a-b)^4$.

5. Чи існують такі значення a, що всі корені рівняння $x^2+2x-3a^2+2=0$ більші за -1, але менші за 1 ?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1990 року

1. На дузі півкола з центром O позначили точки A, B, C і D (саме у такому порядку). Прямі AD і BC перетинаються у точці M. Доведіть рівність:
$$2\angle AMB = |\angle AOB - \angle COD|.$$

2. Точка M ділить сторону CD прямокутника $ABCD$ так, що $AB = AM$. Знайдіть $\angle CBM$, якщо одна сторона прямокутника удвічі більша за іншу.

3. Обчисліть значення виразу: $\frac{12\cdot 18^{12}-6^{15}\cdot 3^{10}}{21\cdot 9^{11}\cdot 4^6+3^{23}\cdot 8^4}$.

4. Відомо, що $xy \leqslant 0$. Доведіть нерівність: $(x+y)^4 \leqslant \left(x^2-y^2\right)^2$.

5. Чи існують такі значення a, що всі корені рівняння $x^2-(a^2-3)x+4=0$ більші за 2, але менші за 10 ?

Вступний екзамен з математики 1991 року

1. Доведіть, що у чотирикутнику, вписаному у коло, суми протилежних кутів дорівнюють 180°.

2. Основи трапеції дорівнюють 2 і 3, а діагоналі — 3 і 4. Знайдіть кут між діагоналями трапеції.

3. При яких значеннях a має зміст дріб: $\frac{\sqrt{36-a^2}-1}{a^2-a-20}$?

4. Квадрат двоцифрового числа містить парне число десятків. Знайдіть цифру одиниць цього двоцифрового числа.

5. При кожному значенні a розв'яжіть рівняння: $(x-2)(x-3)=(a-2)(a-3)$.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1991 року

1. Доведіть, що у чотирикутнику $ABCD$, вписаному у коло, виконується рівність $\angle ABD = \angle ACD$.

2. Діагоналі трапеції взаємноперпендикулярні і рівні 3 та 4. Знайдіть середню лінію трапеції.

3. При яких значеннях b має зміст дріб: $\frac{9+\sqrt{1-16b^2}}{15b^2-2b-1}$?

4. Чи існує таке двоцифрове число, яке при діленні на суму квадратів своїх цифр дає у частці 2, а в остачі 6, а при діленні на добуток своїх цифр дає у частці 4, а в остачі 6 ?

5. При кожному значенні b розв'яжіть рівняння: $\frac{x+1}{b+1} \cdot \frac{x+2}{b+2} = 1$.

Вступний екзамен з математики 1994 року

1. Чи існує трикутник, бісектриса якого дорівнює радіусу описаного кола?

2. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 1$ у точці $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. У чому відмінність між розв'язками системи $\begin{cases} x + 0y = 5, \\ x + 0y = 5 \end{cases}$ і розв'язками рівняння $x = 5$? Чи може система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ мати рівно три розв'язки?

4. Знайдіть всі такі пари чисел x і y, що $(2x^2 - 8x + 11)(y^2 + 2y + 8) = 21$.

5. Спростіть значення виразу: $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 1994 року

1. Чи існує трикутник, висота якого дорівнює радіусу описаного кола?

2. Складіть рівняння кола з центром у початку координат, яке дотикається прямої $y = x - 1$.

3. У чому відмінність між розв'язками системи $\begin{cases} 0x + y = 4, \\ 0x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ і розв'язками рівняння $y^3 = 64$? Чи може система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ мати рівно два розв'язки?

4. Знайдіть всі такі пари чисел x і y, що $x^2 + 4x + 7 = \frac{9}{2y^2-12y+21}$.

5. Спростіть значення виразу: $\sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{\sqrt{11}+6} - \sqrt{22}$.

Вступний екзамен з математики 2000 року

1. Розв'яжіть рівняння: а)$\frac{(2|x|-1)^2+7|x|-2}{4x-1} = 0$; б)$|8 - \sqrt{p}| + |\sqrt{p} + 4| = 12$.

2. При кожному значенні a розв'яжіть систему: $\begin{cases} (a+1)x + 3y = 4a - 5, \\ (2a-3)x + y = a - 1. \end{cases}$

3. Діагоналі трапеції взаємноперпендикулярні. Одна з них дорівнює 6. Відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює 9/2. Знайдіть іншу діагональ.

4. При якому a рівняння $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ має корені і один з них є квадратом іншого?

5. Побудуйте графік рівняння: $\frac{x^2-4+(x-y+1)^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2-y^2} = 0$.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2000 року

1. Розв'яжіть рівняння: а)$\frac{2(1-|x|)^2+7|x|-4}{1+2x}=0$; б)$|\sqrt{y}+3|-|\sqrt{y}-2|=5$.

2. При кожному значенні b розв'яжіть систему: $\begin{cases} 4x+(2b+3)y=2b+2, \\ (b-1)y+12x=8b+10. \end{cases}$

3. Діагоналі трапеції взаємноперпендикулярні і дорівнюють 5 та 12. Знайдіть відрізок, який з'єднує середини основ трапеції.

4. При якому a рівняння $x^2+2ax+16=0$ має корені і один з них є кубом іншого?

5. Побудуйте графік рівняння: $\frac{9-y^2-(x+y-1)^2}{\sqrt{x^2+y^2-9}}+\sqrt{x^2+y^2-9}=0$.

Вступний екзамен з математики 2001 року

1. Два пішоходи A і B вийшли одночасно назустріч один одному із міст M і N і не змінювали швидкості під час руху. До моменту зустрічі A пройшов на 6 км більше, ніж B. Якщо кожен з них буде продовжувати рухатись, то A попаде в місто N через $9/2$ год, а B у M — через 8 год після зустрічі. Визначте відстань між містами M та N.

2. При яких значеннях a рівняння $(a+3)x^2+(3a+9)x-2a^2-6a=0$ має більше одного кореня?

3. Точка P прямокутного трикутника ABC ($\angle B=90°$) ділить гіпотенузу AC навпіл, а точка дотику сторони CP до кола, вписаного у трикутник CBP, ділить AC у відношенні $3:1$, якщо рахувати від вершини A. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

4. Спростіть:
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

5. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\sqrt{x^2-y^2}=x-\sqrt{y}^2$.

6. Що більше: 5^{99} чи 2^{234} ?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2001 року

1. Два пішоходи A і B вийшли одночасно назустріч один одному із міст M і N і не змінювали швидкості під час руху. До моменту зустрічі A пройшов на p км більше, ніж B. Якщо кожен з них буде продовжувати рухатись, то A попаде в місто N через $9/4$ год, а B у M — через 4 год після зустрічі. Визначте p, якщо відстань між містами M та N дорівнює 24 км.

2. При яких значеннях m рівняння $(m-5)x^2-(3m-15)x+3m^2-15m=0$ має більше одного кореня?

3. Про трапецію $ABCD$ з основами AD і BC відомо, що $\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{AB} = 2$. Знайдіть довжини основ, якщо $AC = 5$, $CD = \sqrt{24}$.

4. Спростіть:

$$\sqrt{33+\sqrt{65}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{65}}}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{65}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{65}}}}.$$

5. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\sqrt{y^2-x^2} = \sqrt{x}^2 - y$.

6. Що більше: 5^{111} чи 11^{70} ?

Вступний екзамен з математики 2002 року

1. Скоротіть дріб $\frac{x^{47}+x^{46}+...+x+1}{x^{15}+x^{14}+...+x+1}$ при умові, що $x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1 \neq 0$.

2. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{8}-\sqrt{11+2\sqrt{24}}-\sqrt{28-10\sqrt{3}}}$.

3. При яких a один з коренів рівняння $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ у два рази більший за другий корінь?

4. Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння: $x^2+xy-2y^2-x+y=3$.

5. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{|x-1|-|x+1|}{|x+1|+|x-1|}$.

6. Висота AD, опущена на бічну сторону BC рівнобедреного трикутника ABC, ділить його на трикутники ABD і ADC площею 4 см^2 і 2 см^2 відповідно. Знайдіть сторони трикутника, якщо AC — його основа.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2002 року

1. Скоротіть дріб $\frac{x^{35}+x^{34}+...+x+1}{x^{11}+x^{10}+...+x+1}$ при умові, що $x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1 \neq 0$.

2. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$.

3. При яких b один з коренів рівняння $(4b^2+5b+2)x^2+(4+6b)x+2=0$ у два рази менший за другий корінь?

4. Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння: $2y^2-2x^2+3xy-2y+x=2$.

5. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}$.

6. Висота CD, опущена на бічну сторону AB рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$), ділить його на трикутники ADC і BDC так, що площа $\triangle ADC$ утричі більша площі $\triangle BDC$. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо $AB = 8$ см.

Вступний екзамен з математики 2003 року

1. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{x^2+1}{x\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2+1}}$.

2. Складіть рівняння, коренями якого будуть числа $x_1 + 1$ та $x_2 + 1$, де x_1, x_2 — корені рівняння: $x^2 - 3x - 1 = 0$.

3. Знайдіть найменше значення виразу: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 8x + 16}$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x + 3y + 4z = 6, \\ 3x - 5y - 2z = 4, \\ -5x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$

5. У рівнобедреному трикутнику кут між бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі дорівнює $70°$. Знайдіть кути трикутника.

6. З довільної точки M всередині гострого кута з вершиною A опущено перпендикуляри MP і MC на сторони кута. З точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PC. Знайдіть $\angle MAC$, якщо $\angle PAK = \alpha$.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2003 року

1. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$.

2. Складіть рівняння, коренями якого будуть числа $x_1 - 3$ та $x_2 - 3$, де x_1, x_2 — корені рівняння: $x^2 + 5x + 1 = 0$.

3. Знайдіть найменше значення виразу: $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - 5y - 3z = 1, \\ -3x + 3y + 4z = 2. \end{cases}$

5. У рівнобедреному трикутнику один з кутів, утворених бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі, дорівнює $130°$. Знайдіть кути трикутника.

6. З довільної точки K всередині гострого кута з вершиною P опущено перпендикуляри KM і KC на сторони кута. З точки P опущено перпендикуляр PB на відрізок MC. Знайдіть $\angle CPB$, якщо $\angle KPM = \alpha$.

Вступний екзамен з математики 2004 року

1. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots}}}$.

2. При яких цілих значеннях a рівняння $2x^2 + ax + 8 = 0$ має раціональні корені, сума яких є цілим числом?

3. У трикутнику ABC висота AH_1 ділить сторону BC у відношенні $1 : 1$, а висота BH_2 ділить сторону AC у відношенні $5 : \sqrt{3}$, рахуючи від вершини A (точки H_1, H_2 — основи висот). Знайдіть довжину висоти BH_2, якщо $AB = 1$.

4. Із прямокутного шматка жерсті треба виготовити деко, площа якого втричі більша від площі бічних стінок. Якою має бути висота стінок дека, якщо шматок жерсті має розміри 4 дм на 7 дм?

5. При яких значеннях a система $\begin{cases} ax^2 - xy = x + 4, \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2004 року

1. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\ldots}}}$.

2. При яких цілих значеннях a рівняння $4x^2 + ax + 9 = 0$ має раціональні корені, сума яких є цілим числом?

3. У трикутнику ABC висота AH_1 ділить сторону BC у відношенні $\sqrt{5} : 3$, рахуючи від вершини B, а висота BH_2 ділить сторону AC у відношенні $1 : 1$ (точки H_1, H_2 — основи висот). Знайдіть довжину сторони AB, якщо $AH_1 = 1$.

4. Із прямокутної ділянки землі, яка має розміри 3 м на 5 м, вирішили зробити прямокутну клумбу з доріжкою сталої ширини навкруги клумби. Якою має бути ширина доріжки, щоб її площа була удвічі менша від площі клумби?

5. При яких значеннях a система $\begin{cases} ax^2 + xy = y - 2, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

Вступний екзамен з математики 2005 року

1. Знайдіть всі такі пари чисел (x, y), що $9x^2 - 24xy + 16y^2 + |y - 3| = 0$.

2. При яких значеннях a рівняння $\frac{2}{ax-3a} + \frac{3}{ax+a-x-1} = \frac{x-5}{ax^2-2ax-3a}$ має корінь, не менший 5.

3. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння: $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

4. У рівнобедреному трикутнику кут між бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі дорівнює 70°. Знайдіть кути трикутника.

5. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів, які утворюються при перетині двох паралельних прямих третьою (січною).

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2005 року

1. Знайдіть всі такі пари чисел (x, y), що $4x^2 + 25y^2 - 20xy + |y - 2| = 0$.

2. При яких значеннях b рівняння $\frac{3}{bx-5b} + \frac{2}{bx+b-x-1} = \frac{x-3}{bx^2-4bx-5b}$ має корінь, не менший 2.

3. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння: $x^2 + xy + y^2 = x - y$.

4. У рівнобедреному трикутнику з кутом при вершині 20° знайдіть кут між бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі.

5. Знайдіть кут між бісектрисами кутів, суміжних з внутрішніми односторонніми кутами, які утворюються при перетині двох паралельних прямих третьою (січною).

Вступний екзамен з математики 2006 року

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}=0$.

2. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3, \\ x+y=6. \end{cases}$

3. На стороні AC трикутника ABC взято таку точку E, що $AE:EC=3:4$. У якому відношенні медіана AM ділить відрізок BE?

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $x|y|+y|x|=0$.

5. Якого найменшого значення може набувати вираз: $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2$?

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2006 року

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{x}=0$.

2. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2}, \\ x-y=1. \end{cases}$

3. На стороні AC трикутника ABC взято таку точку E, що $AE:EC=3:4$. У якому відношенні відрізок BE ділить медіану AM?

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}=2$.

5. Якого найменшого значення може набувати вираз: $(x+3)^2+(x+2)^2+(x+1)^2$?

Вступний екзамен з математики 2007 року

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$.

2. Розв'яжіть рівняння: $x|x|+\left(\sqrt{x}\right)^2-20=0$.

3. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y=|2x-1|-2x$.

4. При яких значеннях a і b корені рівняння $x^2+ax+b=0$ дорівнюють $2a$ і $2b$.

5. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає бічну сторону під кутом, що дорівнює куту при основі. Знайдіть кути трикутника.

Тренувальний варіант до екзамену з математики 2007 року

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2}}$.

2. Розв'яжіть рівняння: $\left(\sqrt{x}\right)^4 - \frac{x^2}{|x|} - 20 = 0$.

3. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = |3x-1| - 3x$.

4. При яких значеннях p і q корені рівняння $x^2+px+q=0$ дорівнюють $p/2$ і $q/2$.

5. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає бічну сторону під кутом у півтора рази більшим від кута при основі. Знайдіть кути трикутника.

5 Розв'язки варіантів письмового екзамену

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1981 року

1. Для нумерації сторінок підручника використали 855 цифр. Скільки сторінок у підручнику?

   Розв'язання. Для нумерації сторінок підручника з 1-ої по 9-ту використали 9 цифр. Для нумерації сторінок з 10-ої по 99-ту використали $2 \times 90 = 180$ цифр, бо таких сторінок 90 і на кожної дві цифри.

   Отже, не використаними залишилися $855 - 9 - 180 = 666$ цифр. Зрозуміло, що за допомогою цих цифр було занумеровано ще $666 : 3 = 222$ сторінки — з 100-ої по 321-шу.

   Відповідь: 321 сторінка.

2. Доведіть, що при $ab > 0$ виконується нерівність: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$. В яких випадках має місце знак рівності?

   Розв'язання. Помноживши обидві частині нерівності $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ на $ab > 0$, одержимо: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ або $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$. Використовуючи формулу квадрата різниці, маємо нерівність $(a-b)^2 \geqslant 0$, рівносильну початковій. Остання нерівність, очевидно, виконується і обертається на рівність лише при $a = b$.

   Відповідь: знак рівності має місце лише при $a = b$.

3. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = |x-1| + 5. \end{cases}$

   Розв'язання. Підставивши значення y з другого рівняння у перше, одержимо:

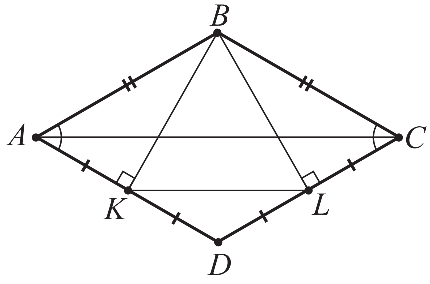
   $$|x-1| + \big|(|x-1|+5) - 5\big| = 1 \quad \text{або} \quad |x-1| + \big||x-1|\big| = 1.$$

   Оскільки $|x-1| \geqslant 0$, то останнє можна подати у вигляді: $|x-1| + |x-1| = 1$ або $|x-1| = \frac{1}{2}$. Звідки $x - 1 = \pm\frac{1}{2}$ і тому $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Використовуючи друге рівняння системи, знаходимо, що $y_1 = \frac{11}{2}$, $y_2 = \frac{11}{2}$.

   Відповідь: $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

4. Відстань між основами двох висот ромба $ABCD$, які проведені з вершини тупого кута B, дорівнює половині діагоналі AC. Знайдіть гострий кут ромба.

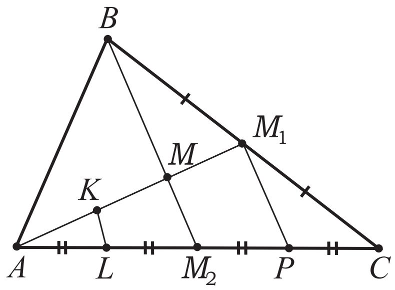
Розв'язання. Оскільки прямокутні трикутники ABK і CBL рівні за гострим кутом і гіпотенузою, то $AK = CL$. Це означає, що рівні і відрізки $KD = LD$, тому за теоремою Фалеса для кута ADC відрізок KL паралельний діагоналі AC. Крім того, за умовою задачі KL дорівнює половині AC, отже, KL — середня лінія трикутника ADC. Таким чином, $AK = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2}$, тоді у прямокутному трикутнику ABK катет AK дорівнює половині гіпотенузи AB. Звідси маємо: $\angle A = 60°$.



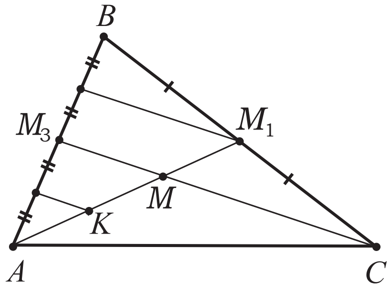
Відповідь: 60°.

5. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершин.

   Розв'язання. Проведемо у трикутнику ABC дві медіани AM_1 і BM_2, які перетинаються у точці M. Доведемо спочатку, що $AM = 2MM_1$. Позначимо точками L і P середини відрізків AM_2 і M_2C відповідно. Таким чином, відрізок AC поділено на чотири рівні частини $AL = LM_2 = M_2P = PC$. Відрізок PM_1 є середньою лінією трикутника M_2BC, тому PM_1 паралельний медіані BM_2. Проведемо також відрізок LK паралельно медіані BM_2 (точка K лежить на AM_1). Використовуючи теорему Фалеса для кута M_1AP, одержимо, що $AK = KM = MM_1$. Отже, рівність $AM = 2MM_1$ доведено.



   Розглянемо тепер новий малюнок трикутника ABC з двома його медіанами AM_1 і CM_3. Міркуючи тут аналогічно до наведеного вище випадку з медіанами AM_1 і BM_2, доводимо, що і медіана CM_3 ділить AM_1 у відношенні 2 : 1, цебто проходить через точку M медіани AM_1.



   Таким чином, через M проходять всі три медіани трикутника ABC; крім цього, аналогічно доведенню рівності $AM = 2MM_1$ встановлюємо, що точка M ділить і медіани BM_2, CM_3 у відношенні 2 : 1, що і завершує доведення.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1984 року

1. Спростіть вираз: $\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}}$.

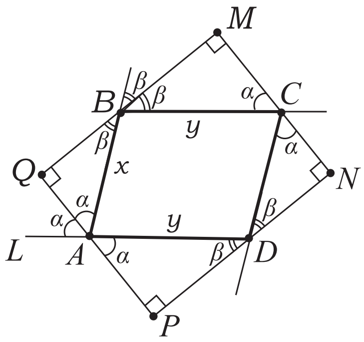
   Розв'язання. Використовуючи формули скороченого множення, маємо:

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} = \frac{\left(x-2\sqrt{xy}+y\right)+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Зазначимо, що оскільки $x > 0$, $y \geqslant 0$, то $\sqrt{x}+\sqrt{y} \neq 0$ і скорочення на $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ виконано законно.

Відповідь: $1+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

2. Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник. Знайдіть діагональ цього прямокутника, якщо сторони паралелограма дорівнюють x і y.



Розв'язання. Позначимо кути паралелограма $\angle A$, $\angle B$ тощо. Якщо AQ — бісектриса зовнішнього кута BAL, то

$$\alpha = (180^\circ - \angle A)/2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A;$$

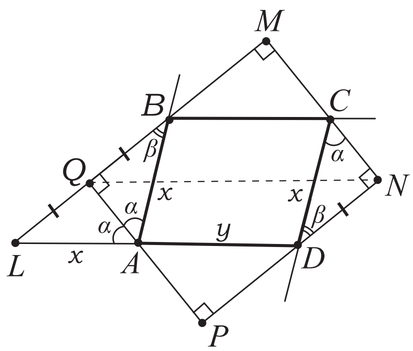
аналогічно $\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$. З трикутника AQB маємо, що

$$\angle AQB = 180^\circ - (\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ.$$

Так само доводимо, що і решта кутів чотирикутника $QMNP$ прямі; отже, $QMNP$ — прямокутник.

З прямокутних трикутників ABQ та ADP отримуємо, що $QA = x\cos\alpha$ і $AP = y\cos\alpha$, тому $PQ = (x+y)\cos\alpha$. Аналогічно, розглядаючи прямокутні трикутники ABQ і BCM, одержуємо рівність: $QM = (x+y)\sin\alpha$. Тепер, використовуючи теорему Піфагора для $\triangle PQM$, знаходимо діагональ прямокутника: $PM^2 = PQ^2 + QM^2 = (x+y)^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = (x+y)^2$.

Відповідь: $x+y$.



Зауважимо, що діагональ прямокутника $QMNP$ можна було знайти і без використання тригонометричних функцій. Дійсно, продовжимо відрізок DA до перетину з прямою MQ у точці L. Тоді відрізок AQ є висотою і бісектрисою трикутника LAB, тому $LA = AB = x$. З іншого боку, оскільки прямокутні трикутники CND, AQB і AQL рівні за гіпотенузою і гострим кутом, то відрізки LQ і DN рівні між собою. Крім того, вони паралельні, бо лежать на паралельних сторонах прямокутника. Це означає, що чотирикутник $LQND$ — паралелограм, а тому діагональ прямокутника QN дорівнює $LD = x+y$.

3. Обчисліть: $\left(\frac{131313}{242424}+\frac{721}{1236}\right)\left(\frac{131313}{242424}-\frac{721}{1236}\right)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $\frac{131313}{242424} = \frac{13\cdot 10101}{24\cdot 10101} = \frac{13}{24}$ та $\frac{721}{1236} = \frac{7\cdot 103}{12\cdot 103} = \frac{7}{12}$. Тому

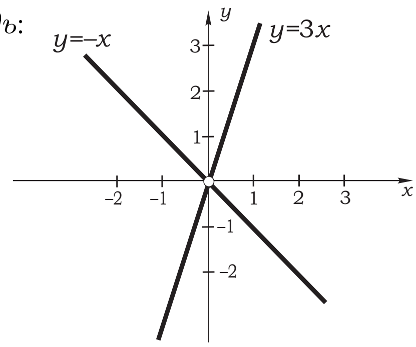
$$\left(\frac{131313}{242424}+\frac{721}{1236}\right)\left(\frac{131313}{242424}-\frac{721}{1236}\right) = \left(\frac{13}{24}+\frac{7}{12}\right)\left(\frac{13}{24}-\frac{7}{12}\right) = \frac{27}{24}\cdot\frac{-1}{24} = -\frac{3}{8^2}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{64}$.

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{\sqrt{(y-x)^2}}{\sqrt{x^2}} = 2$.

Розв'язання. Зважаючи на формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, маємо, що $\frac{|y-x|}{|x|} = 2$; звідки $\frac{y-x}{x} = 2$ або $\frac{y-x}{x} = -2$. З останніх рівностей, не забуваючи про умову $x \neq 0$, одержуємо рівняння двох прямих: $y = 3x$ або $y = -x$.

Відповідь:



Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1985 року

1. Нехай $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Обчисліть значення виразу: $f\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$.

Розв'язання. Оскільки за умовою $f(t) = \frac{t-1}{t+1}$, то при $t = -\frac{1}{x}$ одержуємо, що

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{-1 - x}{-1 + x} = -\frac{x+1}{x-1}.$$

Тоді $f\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) = -\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = -1$ при $x \neq \pm 1$ та $x \neq 0$.

Відповідь: -1 при $x \neq \pm 1$ та $x \neq 0$.

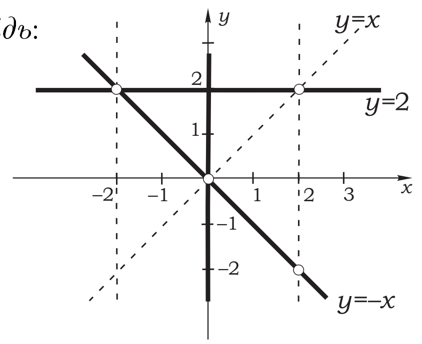
2. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\frac{(xy-2x)\left(y^5-x^2y^3\right)}{(x^2y^2+y^4-2xy^3)(|x|-2)} = 0$.

Розв'язання. Розкладемо вираз на множники:

$$\frac{xy^3(y-2)\left(y^2-x^2\right)}{y^2\left(x^2+y^2-2xy\right)(|x|-2)} = 0,$$
$$\frac{xy^3(y-2)(y-x)(y+x)}{y^2\left(y-x\right)^2(|x|-2)} = 0,$$

Зауважимо, що рівність виконується, коли знаменник дробу не рівний нулю (тобто $y \neq 0$, $y \neq x$, $x \neq \pm 2$), а чисельник дорівнює нулю. Отже, маємо рівняння прямих: $x = 0$, або $y = 2$, або $y = -x$.

Відповідь:



3. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 5x - ay - 6 = 0, \\ 2x + 6y + 3 = 0 \end{cases}$ має такі розв'язки, що $x > 0$, $y < 0$?

Розв'язання. Знайдемо значення x з другого рівняння системи: $x = -3y - \frac{3}{2}$, і підставимо його у перше рівняння:

$$-15y - \frac{15}{2} - ay - 6 = 0.$$

Помножимо обидві частини на (-2) і зведемо подібні доданки:

$$(2a + 30)y + 27 = 0.$$

Звідси маємо, що $y = -\frac{27}{2a+30}$ і умова $y < 0$ виконується лише коли $2a + 30 > 0$, тобто при $a > -15$. Повертаючись до змінної x, маємо:

$$x = -3y - \frac{3}{2} = \frac{81}{2a + 30} - \frac{3}{2} = \frac{36 - 3a}{2a + 30}.$$

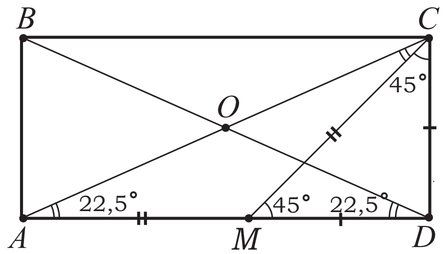
Оскільки має виконуватися умова $x > 0$ і відомо, що $2a + 30 > 0$, то $36 - 3a > 0$; звідки $a < 12$.

Таким чином, значення a мають задовольняти нерівності: $a > -15$ і $a < 12$.

Відповідь: $-15 < a < 12$.

4. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ так, що $MD = DC$ і $MA = MC$. Знайдіть кут між діагоналями цього прямокутника.

Розв'язання. Оскільки $\triangle CDM$ — рівнобедрений прямокутний трикутник, то $\angle CMD = 45°$. Трикутник AMC також рівнобедрений, тому $\angle CAM = \frac{45°}{2} = 22,5°$. Тоді з рівнобедреного трикутника AOD знаходимо, що $\angle AOD = 180° - 2 \cdot 22,5° = 135°$.



Відповідь: $45°$.

5. Кожну сторону прямокутного трикутника збільшили на 1. Який вид має одержаний трикутник: гострокутний, прямокутний чи тупокутний?

Розв'язання. Скористаємося таким твердженням: якщо x, y, z — сторони трикутника, серед яких z найбільша, і $x^2 + y^2 > z^2$, то трикутник гострокутний (якщо $x^2 + y^2 < z^2$, то тупокутний, а при $x^2 + y^2 = z^2$ — трикутник прямокутний).

Нехай a, b — катети, а c — гіпотенуза прямокутного трикутника. Після збільшення сторін маємо три відрізки довжиною $(a+1)$, $(b+1)$ і $(c+1)$. З'ясуємо, чи можна з цих відрізків взагалі утворити трикутник. Оскільки відрізок $(c + 1)$ найдовший, то треба перевірити нерівність трикутника $(a+1)+(b+1) > (c+1)$, яка рівносильна $a + b + 1 > c$. Ця нерівність виконується, бо відрізки a, b, c — сторони трикутника і тому $a + b > c$.

Скористаємося тепер наведеним на початку розв'язання твердженням. Для цього обчислимо значення виразу

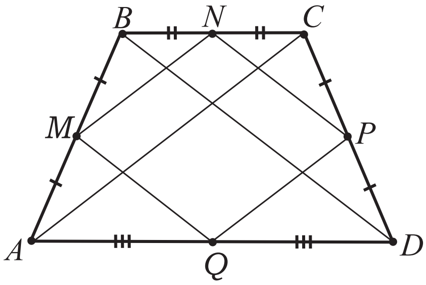
$$(a+1)^2+(b+1)^2-(c+1)^2=(a^2+b^2-c^2)+2(a+b-c)+1.$$

Оскільки a, b і c — сторони прямокутного трикутника, то $a^2+b^2=c^2$, крім цього, $a+b>c$, тому $(a+1)^2+(b+1)^2-(c+1)^2>0$. Отже, трикутник зі сторонами $(a+1)$, $(b+1)$ і $(c+1)$ гострокутний.

Відповідь: гострокутний.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1986 року

1. Середини сторін рівнобічної трапеції послідовно з'єднані між собою. Який вид має утворений чотирикутник?

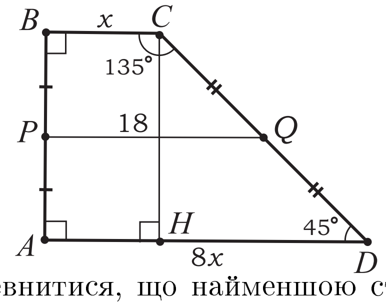


Розв'язання. Проведемо у трапеції $ABCD$ діагональ AC. Тоді MN — середня лінія трикутника ABC, а QP — середня лінія $\triangle ADC$, тому кожний з відрізків MN і QP дорівнює половині діагоналі AC. Аналогічно доводимо, що відрізки NP і MQ рівні половині іншої діагоналі BD. Але у рівнобічної трапеції діагональ AC рівна діагоналі BD! Тому всі сторони чотирикутника $MNPQ$ рівні між собою, отже, цей чотирикутник — ромб.

Для завершення розв'язання треба зазначити, що, розглядаючи різні рівнобічні трапеції $ABCD$, будемо отримувати ромби $MNPQ$ з довільними величинами кутів NPQ (зокрема, відмінними від $90°$); це зауваження дозволяє впевнитися, що $MNPQ$ — саме ромб (не завжди квадрат).

Відповідь: ромб.

2. У прямокутній трапеції один з кутів дорівнює $135°$, середня лінія дорівнює 18, а основи відносяться як $1:8$. Знайдіть довжину найменшої сторони трапеції.



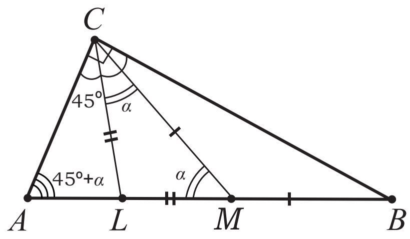
Розв'язання. Нехай менша основа трапеції $ABCD$ рівна x, тоді за умовою задачі більша основа дорівнюватиме $8x$. Як відомо, середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, тому $PQ=\frac{x+8x}{2}=18$. Звідси $x=4$ і $BC=4$, $AD=32$.

Якщо малюнок зроблено охайно, то можна впевнитися, що найменшою стороною трапеції є BC. Обгрунтуємо цю здогадку. Опустимо з точки C висоту CH. Тоді $ABCH$ — прямокутник, а тому $AH=4$, $HD=28$. За умовою задачі $\angle D=45°$, бо $\angle BCD=135°$, тому у прямокутному трикутнику CHD гострі куті рівні по $45°$, отже, цей трикутник рівнобедрений: $CH=DH=28$.

Таким чином, $BC=4$, $AD=32$, бічна сторона $AB=CH=28$, а сторона CD більша AB. Тому найменшою стороною трапеції є BC.

Відповідь: 4.

3. З вершини C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) провели бісектрису CL і медіану CM. Виявилося, що трикутник CLM рівнобедрений. Обчисліть гострі кути трикутника ABC.



Розв'язання. Нехай у рівнобедреному трикутнику CLM рівні сторони CL і LM, а кути при основі дорівнюють α. Оскільки CL — бісектриса прямого кута, то $\angle ACL = 45°$. Далі розглянемо трикутник ACM. Оскільки медіана CM прямого кута дорівнює половині гіпотенузи AB, то трикутник ACM рівнобедрений ($CM = MA$) і тому $\angle A = \angle ACM = 45° + \alpha$. Обчислюючи суму кутів трикутника ACM, маємо: $90° + 3\alpha = 180°$, що рівносильно $\alpha = 30°$. Тоді $\angle A = 45° + \alpha = 75°$, $\angle B = 15°$.

Зауважимо, що в умові задачі не вказано, які саме сторони рівнобедреного трикутника CLM рівні між собою. Доведемо, що відмінного від розглянутого варіанту, коли $CL = LM$, бути не може. Дійсно, сторона CM не може дорівнювати ML, бо $CM = MA > ML$. Не може CM дорівнювати і CL, бо бісектриса CL завжди лежить між медіаною CM і висотою CH трикутника ABC (якщо $CM = CL$, то висота CH буде лежати між CM і CL).

Відповідь: 75°, 15°.

4. Побудуйте на координатній площині графік функції:

$$y = \frac{x\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}} - \frac{4x - x^3}{x - 2} + \frac{25x^2 - 40x + 16}{4 - 5x}.$$

Розв'язання. Одразу зауважимо, що мають виконуватися умови: $x \geqslant 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ і $x \neq \frac{4}{5}$. Спростимо наведений в умові вираз. Для цього розкладемо чисельники дробів на множники

$$y = \frac{x\left(\sqrt{x} - 1\right)}{1 - \sqrt{x}} - \frac{x(2 - x)(2 + x)}{x - 2} + \frac{(5x - 4)^2}{4 - 5x},$$

виконаємо очевидні скорочення

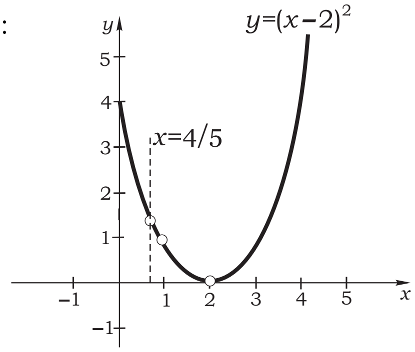
$$y = -x + x(2 + x) + (4 - 5x)$$

і зведемо подібні доданки

$$y = x^2 - 4x + 4.$$

Тепер, використовуючи формулу квадрату різниці, маємо: $y = (x - 2)^2$.

Відповідь:



5. При яких значеннях a система $\begin{cases} ax^2+xy=y-2, \\ 2x+y=5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. З другого рівняння знаходимо, що $y=5-2x$, і, підставивши це значення y у перше рівняння системи, одержуємо: $ax^2+x(5-2x)=(5-2x)-2$, що після спрощення набуває вигляду:

$$(a-2)x^2+7x-3=0. \qquad (1)$$

По кожному розв'язку x рівняння (1) можна віднайти єдине значення y (нагадаємо, що $y=5-2x$), тому початкова система має єдиний розв'язок — пару чисел (x,y) — тоді і лише тоді, коли єдиний розв'язок має рівняння (1). При $a\neq 2$ квадратне рівняння (1) має єдиний розв'язок, коли $D=49+12(a-2)=0$; звідки знаходимо $a=-25/12$. При $a=2$ рівняння (1) набуває вигляду $7x-3=0$ і, очевидно, має єдиний розв'язок $x=\frac{3}{7}$.

Відповідь: $a=2$, $a=-25/12$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1987 року

1. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{3\sqrt{2}-4}+\frac{1}{11+2\sqrt{30}}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}+\frac{1}{11-2\sqrt{30}}$$

є раціональним числом.

Розв'язання. Виконаємо наступні дії:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}=\frac{(3\sqrt{2}+4)-(3\sqrt{2}-4)}{\left(3\sqrt{2}+4\right)\left(3\sqrt{2}-4\right)}=\frac{8}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2}=\frac{8}{2}=4.$$

Аналогічно, перетворюючи два інші доданки, знаходимо:

$$\frac{1}{11+2\sqrt{30}}+\frac{1}{11-2\sqrt{30}}=\frac{(11-2\sqrt{30})+(11+2\sqrt{30})}{\left(11+2\sqrt{30}\right)\left(11-2\sqrt{30}\right)}=\frac{22}{121-120}=22.$$

Тому наведений в умові задачі вираз рівний раціональному числу $4+22=26$.

2. Відомо, що x_1, x_2 — корені рівняння $x^2+ax+a-1987=0$. При якому значенні a сума $x_1^2+x_2^2$ приймає найменше значення?

Розв'язання. За теоремою Вієта маємо, що

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1x_2=a-1987. \end{cases}$$

Тоді

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-a)^2-2(a-1987)=a^2-2a+3974.$$

Виділивши повний квадрат, знайдемо найменше значення $a^2-2a+3974$. Маємо:

$$a^2-2a+3974=\left(a^2-2a+1\right)+3973=(a-1)^2+3973\geqslant 3973.$$

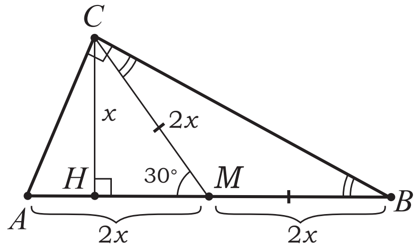
Отже, при $a = 1$ вираз $a^2 - 2a + 3974$ набуває свого найменшого значення.

Для завершення розв'язання треба перевірити законність використання теореми Вієта при $a = 1$, тобто з'ясувати, чи має вихідне квадратне рівняння корені. При $a = 1$ отримуємо рівняння $x^2 + x - 1986 = 0$, яке має корені, бо $D = 1 + 4 \cdot 1986 > 0$. Отже, теорему Вієта використано законно.

Відповідь: $a = 1$.

3. У прямокутному трикутнику висота, проведена з прямого кута, у чотири рази менша гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

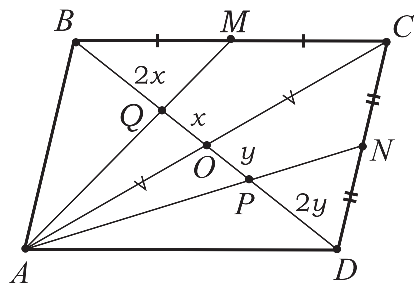
Розв'язання. Нехай висота $CH = x$, тоді гіпотенуза $AB = 4x$. Скористаємося властивістю, що медіана прямого кута удвічі менша за гіпотенузу, тобто медіана $CM = 2x$. Тепер бачимо, що у прямокутному трикутнику CHM катет $CH = x$ дорівнює половині гіпотенузи $CM = 2x$, отже, $\angle CMH = 30°$. Оскільки трикутник CMB рівнобедрений, то $\angle MBC = \angle MCB$ і тому $\angle B = \frac{30°}{2} = 15°$.



Відповідь: 15°, 75°.

4. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, а N — середина CD. Доведіть, що прямі AM і AN ділять діагональ BD на три рівні частини.

Розв'язання. Проведемо діагональ AC, яка точкою перетину з BD ділиться навпіл. Розглянемо трикутник ABC і скористаємося тим, що дві його медіани (відрізки AM і BO) точкою перетину діляться у відношенні $2 : 1$. Тому якщо $OQ = x$, то $QB = 2x$. Аналогічно, розглядаючи трикутник ADC, маємо, що $OP = y$ і $PD = 2y$. Оскільки точка O — середина діагоналі BD, то $3x = BO = OD = 3y$, отже, $x = y$, що і доводить рівність $BQ = QP = PD = 2x$.



Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1988 року

1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях k вираз $k^3 + 3k^2 + 2k$ ділиться на 6.

Розв'язання. Розкладемо вираз на множники: $k^3 + 3k^2 + 2k = k(k^2 + 3k + 2)$ і $k^2 + 3k + 2 = (k^2 + k) + (2k + 2) = (k + 1)(k + 2)$. Таким чином, має місце рівність

$$k^3 + 3k^2 + 2k = k(k + 1)(k + 2). \tag{2}$$

У правій частині рівності (2) стоїть добуток трьох послідовних натуральних чисел, серед яких принаймні одне парне і рівно одне ділиться на 3. Тому добуток $k(k + 1)(k + 2)$ ділиться на $2 \cdot 3 = 6$, що і треба було довести.

2. Побудуйте графік функції: $y = \sqrt{(1+\sqrt{x})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{x})^2}$. Знайдіть всі такі значення x, що $y < 2$.

Розв'язання. Одразу зауважимо, що $x \geqslant 0$. Тоді, використовуючи формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, маємо рівність:

$$y = \left|1+\sqrt{x}\right| - \left|1-\sqrt{x}\right|.$$

Оскільки $1+\sqrt{x} > 0$, то $|1+\sqrt{x}| = 1+\sqrt{x}$. Для розкриття другого модуля розглянемо два випадки:

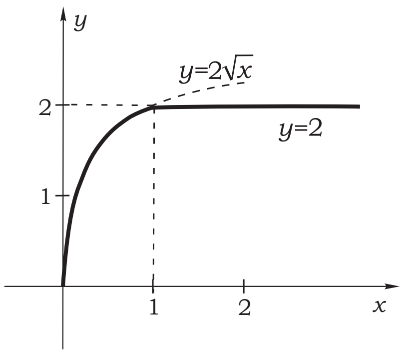
I випадок $1-\sqrt{x} \leqslant 0$**.** Тоді $x \geqslant 1$ і

$$y = \left(1+\sqrt{x}\right) + \left(1-\sqrt{x}\right) = 2.$$

II випадок $1-\sqrt{x} \geqslant 0$**.** Тоді $0 \leqslant x \leqslant 1$ і

$$y = \left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}.$$

Маємо графік:

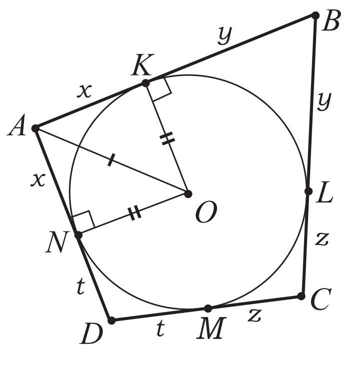


Тепер зрозуміло, що умова $y < 2$ виконується при $0 \leqslant x < 1$.

Відповідь: $0 \leqslant x < 1$.

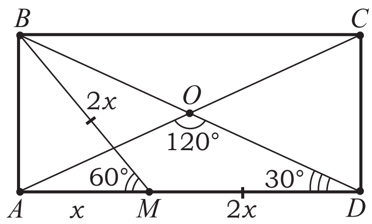
3. Доведіть, що у чотирикутнику, описаному навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні між собою.

Розв'язання. Нехай K, L, M, N — точки дотику сторін чотирикутника до кола. Легко бачити, що прямокутні трикутники AKO і ANO рівні за катетом і гіпотенузою, тому $AK = AN = x$ (цей факт називають теоремою про рівність двох дотичних). Аналогічно $KB = BL = y$, $LC = CM = z$ і $MD = DN = t$. Тепер зрозуміло, що $AB + CD = (x+y) + (z+t)$ і $BC + DA = (y+z) + (t+x)$, що і доводить рівність сум $AB + CD$ і $BC + DA$.

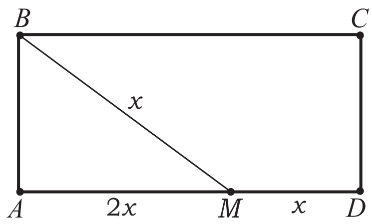


4. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1 : 2$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, якщо $MB = MD$.

Розв'язання. Нехай $AM = x$, тоді за умовою $MD = 2x = MB$. Отже, у прямокутному трикутнику ABM катет AM дорівнює половині гіпотенузи MB, тому $\angle AMB = 60°$. Оскільки цей кут є зовнішнім кутом рівнобедреного трикутника BMD, то $\angle BDA = 30°$. Тепер, розглядаючи рівнобедрений трикутник AOD, маємо, що $\angle AOD = 120°$ і тому $\angle DOC = 60°$.



Зауважимо, що випадок, коли точка M ділить сторону AD у відношенні $1 : 2$ наступним чином: $MD = x$, $AM = 2x$, неможливий, бо тоді у прямокутному трикутнику ABM гіпотенуза $BM = x$ буде меншою за катет $AM = 2x$.



Відповідь: $60°$.

5. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 - x + a^2 = 0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2$?

   Розв'язання. Квадратне рівняння $x^2 - x + a^2 = 0$ має корені, коли $D = 1 - 4a^2 \geqslant 0$, тобто при $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 x_2 = a^2. \end{cases}$$

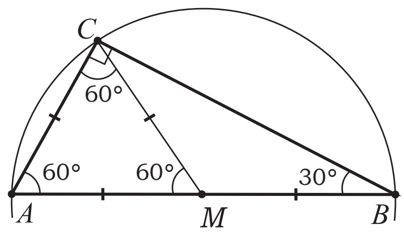
   Оскільки серед коренів x_1, x_2 не може бути рівних нулю, то $a \neq 0$. Далі перетворимо задану в умові нерівність $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2$ наступним чином: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 0$ або $\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 0$. Остання нерівність виконується при $\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{x_2}{x_1}$, тобто $x_1 \neq \pm x_2$. Якщо $x_1 = x_2$, то $D = 0$ і $a = \pm\frac{1}{2}$, отже, при $a = \pm\frac{1}{2}$ нерівність задачі не виконується. Якщо ж $x_1 = -x_2$, то $x_1 + x_2 = 0$, що суперечить теоремі Вієта, тобто при жодному значенні a сума $x_1 + x_2$ не може дорівнювати нулю.

   Відповідь: $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1989 року

1. Чи може один з катетів прямокутного трикутника дорівнювати радіусу описаного кола?

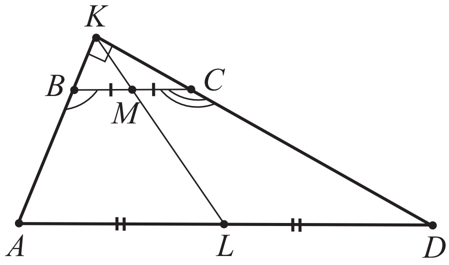
   Розв'язання. Центр описаного кола прямокутного трикутника лежить на середині гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи AB або медіані CM. Тепер зрозуміло, що коли $\angle A = 60°$, то трикутник ACM рівносторонній і $CA = AM = MC = R$.



   Відповідь: може, наприклад, у трикутника з кутами $90°$, $60°$ і $30°$.

2. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 10 см, а сума кутів при меншій основі становить 270°. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

Розв'язання. Продовжимо прямі AB і DC до перетину у точці K. Тоді $\angle K = 90°$, бо з умови задачі легко маємо, що $\angle KBC + \angle KCB = 90°$. Проведемо у $\triangle AKD$ медіану KL. Оскільки $BC||AD$, то KL ділить відрізок BC навпіл. Таким чином, KL і KM — медіани прямокутних трикутників AKB і BKC, тому $KL = \frac{AD}{2} = 5$, $KM = \frac{BC}{2} = 1$. Отже, $ML = KL - KM = 4$.



Відповідь: 4 см.

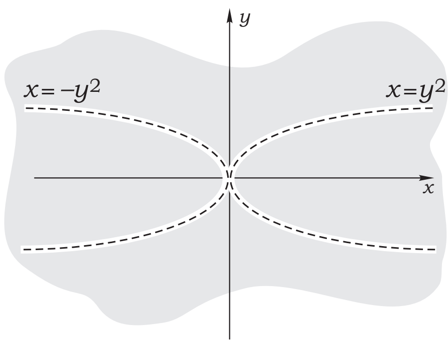
3. Побудуйте на координатній площині графіки рівнянь:

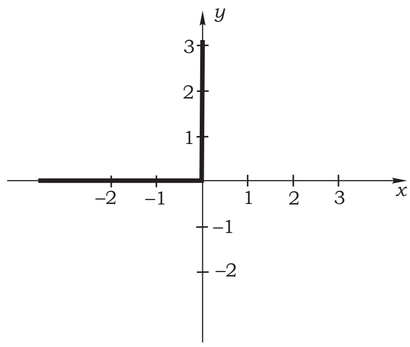
$$\text{а) } \frac{y^2 - |x|}{y^2 - |x|} = 1, \qquad \text{б) } \sqrt{x^2 + y^2} = (\sqrt{y})^2 - x.$$

Розв'язання. а) Наведена рівність виконується для всіх точок $A(x, y)$ площини, окрім тих, у яких $y^2 = |x|$. Залишилося зауважити, що $y^2 = |x|$ рівносильно умові: $x = y^2$ або $x = -y^2$.

Розв'язання. б) Якщо не забути про нерівність $y \geqslant 0$, то умова задачі набуває вигляду: $\sqrt{x^2 + y^2} = y - x$. Зауважимо, що оскільки ліва частина рівності невід'ємна, то $y - x \geqslant 0$. Далі, підносячи обидві частини до квадрату і виконуючи очевидні скорочення, одержимо $xy = 0$, тобто $x = 0$ або $y = 0$. Отже, розв'язками будуть точки координатних прямих OX і OY, які задовольняють умови $y \geqslant 0$ та $y \geqslant x$.

Відповідь:





4. Чи існує таке двоцифрове число, що у два рази менше двоцифрового числа, кожна цифра якого на 2 більше деякої цифри даного числа?

Розв'язання. Так, наприклад, число 22. Покажемо, як було знайдене це число. Кожне двоцифрове число x можна подати у вигляді $x = 10a+b$, де a, b — цифри у запису числа x, a — цифра десятків, b — одиниць. Тоді $2x = 20a + 2b$ і за умовою задачі число $2x$ складається з цифр $(a+2)$ і $(b+2)$. Якщо $(a+2)$ — кількість десятків, а $(b + 2)$ — кількість одиниць числа $2x$, то $2x = 10(a + 2) + (b + 2)$ і отримуємо рівняння $20a + 2b = 10(a + 2) + (b + 2)$, яке після спрощення має вигляд: $10a + b = 22$. Це означає, що $a = 2$, $b = 2$.

Відповідь: так.

5. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+(a+1)x+a-\frac{1}{2}=0$. При яких значеннях a виконується нерівність: $x_1^2+x_2^2<\frac{11}{4}$?

Розв'язання. Розглянемо дискримінант рівняння: $D=(a+1)^2-4a+2$, який можна подати у вигляді: $D=a^2-2a+3=(a-1)^2+2$. Оскільки $D>0$, то задане квадратне рівняння має корені при всіх значеннях a. Зважаючи на очевидну рівність $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ і теорему Вієта

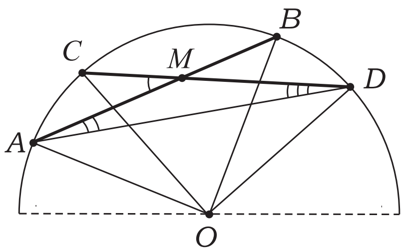
$$\begin{cases} x_1+x_2=-(a+1), \\ x_1x_2=a-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

маємо, що $x_1^2+x_2^2=(a+1)^2-2a+1=a^2+2$. Отже, нерівність $x_1^2+x_2^2<\frac{11}{4}$ можна замінити на $a^2+2<\frac{11}{4}$, звідки $a\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: $a\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1990 року

1. На дузі півкола з центром O позначили точки A, C, B і D (саме у такому порядку). Хорди AB і CD кола перетинаються у точці M. Доведіть рівність: $\angle AMC=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)$.



Розв'язання. З'єднаємо точки A і D. Тоді $\angle AMC$ — зовнішній кут $\triangle AMD$, тому $\angle AMC=\angle ADC+\angle BAD$. Але $\angle ADC$ і $\angle BAD$ — вписані кути, тому $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC$ і $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$, що і доводить твердження задачі.

2. Точка M ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1:2$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, якщо $MB=MD$.

Розв'язання. Див. задачу 4 за 1988 рік.

Відповідь: 60°.

3. Обчисліть значення виразу: $\frac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

Розв'язання. Використаємо властивості степеня (наприклад, $27^3=(3^3)^3=3^9$) і зробимо наступні перетворення:

$$\frac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}=\frac{2^{19}\cdot 3^9+3\cdot 5\cdot 2^{18}\cdot 3^8}{2^9\cdot 3^9\cdot 2^{10}+3^{10}\cdot 2^{20}}=\frac{2^{18}\cdot 3^9\cdot(2+5)}{2^{19}\cdot 3^9\cdot(1+3\cdot 2)}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4. Відомо, що $ab\geqslant 0$. Доведіть нерівність: $\left(a^2-b^2\right)^2\geqslant(a-b)^4$.

Розв'язання. Використаємо формулу різниці квадратів: $(a-b)^2(a+b)^2\geqslant(a-b)^4$. Далі перенесемо все у ліву частину і винесемо за дужки множник $(a-b)^2$; одержимо: $(a-b)^2\cdot((a+b)^2-(a-b)^2)\geqslant 0$ або, після спрощення другого співмножника, $(a-b)^2\cdot 4ab\geqslant 0$. Оскільки $ab\geqslant 0$, то нерівність доведено.

5. Чи існують такі значення a, що всі корені рівняння $x^2 + 2x - 3a^2 + 2 = 0$ більші за -1, але менші за 1 ?

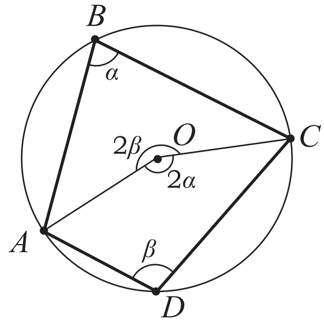
   Розв'язання. Якщо корені x_1, x_2 рівняння $x^2 + 2x - 3a^2 + 2 = 0$ знаходяться в межах від -1 до 1, то $-2 < x_1 + x_2 < 2$, але за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -2$. Отримана суперечність дає негативну відповідь на питання задачі.

   Відповідь: ні.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1991 року

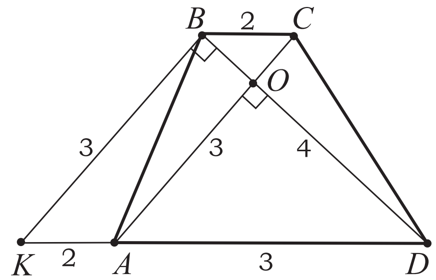
1. Доведіть, що у чотирикутнику, вписаному у коло, суми протилежних кутів дорівнюють 180°.

   Розв'язання. Вписаний у коло кут дорівнює половині центрального кута, тому якщо $\angle ABC = \alpha$, то $\angle AOC = 2\alpha$. Аналогічно вписаний кут $\angle ADC = \beta$ дорівнює половині центрального кута, тобто половині "зовнішньої" частини кута AOC (на малюнку кут 2β). Оскільки $2\alpha + 2\beta = 360°$, то $\alpha + \beta = 180°$, що і треба було довести.



2. Основи трапеції дорівнюють 2 і 3, а діагоналі — 3 і 4. Знайдіть кут між діагоналями трапеції.

   Розв'язання. Нехай діагональ $AC = 3$, а $BD = 4$. Виконаємо добудову: проведемо через вершину B пряму, паралельну діагоналі AC, до перетину з прямою DA у точці K, тобто $KB||AC$. Крім цього $BC||KA$, тому чотирикутник $KBCA$ — паралелограм, звідки $KA = BC = 2$, $KB = AC = 3$, $KD = 5$. Таким чином, сторони трикутника KBD дорівнюють 3, 4 і 5, отже, $\triangle KBD$ — прямокутний трикутник $(3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 5^2)$ і $\angle KBD = 90°$. Але прямі KB і AC паралельні, тому $\angle AOD = \angle KBD = 90°$.



   Відповідь: 90°.

3. При яких значеннях a має зміст дріб: $\frac{\sqrt{36-a^2}-1}{a^2-a-20}$?

   Розв'язання. Треба врахувати умови: $36 - a^2 \geqslant 0$ і $a^2 - a - 20 \neq 0$. Перша з них виконується при $a \in [-6, 6]$, а друга — при $a \neq 5$ та $a \neq -4$.

   Відповідь: $a \in [-6, -4) \cup (-4, 5) \cup (5, 6]$.

4. Квадрат двоцифрового числа містить парне число десятків. Знайдіть цифру одиниць цього двоцифрового числа.

   Розв'язання. Якщо двоцифрове число x має вигляд: $x = 10a + b$, де a — цифра десятків числа x, b — цифра одиниць, то $x^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Зрозуміло, що $100a^2$ не впливає на цифру десятків числа x^2, $20ab$ має парку цифру десятків, тому b^2 також має парну цифру десятків. Але серед всіх квадратів одноцифрових чисел: $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$, лише $4^2 = 16$ і $6^2 = 36$ мають непарну цифру десятків. Отже, b — довільна цифра, окрім 4 та 6.

Відповідь: $0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9$.

5. При кожному значенні a розв'яжіть рівняння: $(x-2)(x-3) = (a-2)(a-3)$.

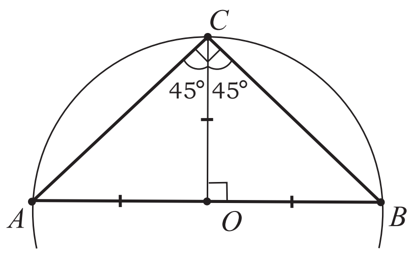
   Розв'язання. Зрозуміло, що $x = a$ розв'язок цього рівняння, але треба знайти **всі** розв'язки! Тому розкриємо дужки $x^2 - 5x = a^2 - 5a$. Якщо всі доданки перенести в один бік: $(x^2 - a^2) - (5x - 5a) = 0$, то ліву частину легко розкласти на множники: $(x-a)(x+a-5) = 0$. Тепер ясно, що крім кореня $x = a$ рівняння має корінь $x = 5 - a$.

   Відповідь: $x_1 = a$, $x_2 = 5 - a$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 1994 року

1. Чи існує трикутник, бісектриса якого дорівнює радіусу описаного кола?

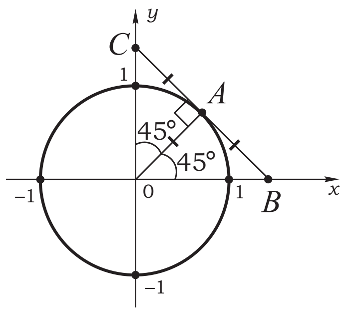
   Розв'язання. До правильної відповіді легко дійти, коли згадати, що у прямокутному трикутнику медіана прямого кута дорівнює радіусу описаного кола. Якщо ж розглянути рівнобедрений прямокутний трикутник, то бісектриса прямого кута дорівнюватиме медіані, а отже, і радіусу описаного кола.



   Відповідь: існує.

2. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 1$ у точці $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Розв'язання. Нехай BC — шукана дотична. Оскільки координати точки дотику $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ рівні між собою, то точка A лежить на бісектрисі прямого кута першої чверті. Тоді трикутники CAO і BAO є прямокутними і рівнобедреними; отже, $CA = AO = AB = R = 1$. За теоремою Піфагора $OC^2 = OA^2 + AC^2 = 2$, аналогічно $OB^2 = 2$.



   Таким чином, шукана дотична проходить через точки $B(\sqrt{2}, 0)$ і $C(0, \sqrt{2})$, а тому має рівняння $x + y = \sqrt{2}$.

   Відповідь: $x + y = \sqrt{2}$.

3. У чому відмінність між розв'язками системи $\begin{cases} x + 0y = 5, \\ x + 0y = 5 \end{cases}$ і розв'язками рівняння $x = 5$? Чи може система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ мати рівно три розв'язки?

Розв'язання. Розв'язками системи $\begin{cases} x+0y=5, \\ x+0y=5 \end{cases}$ будуть довільні пари чисел $(5,y)$, де y — довільне дійсне число. Таких пар нескінченна кількість, наприклад, $(5,2)$, $(5,\sqrt{3})$ тощо. Що стосується рівняння $x=5$, то воно має єдиний розв'язок $x=5$.

Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ не може мати рівно три розв'язки, оскільки рівняння $ax+by=c$ задає на координатній площині або пряму, або всю площину (при $a=b=c=0$), або порожню множину (при $a=b=0$, $c\neq 0$). Перетин двох таких фігур (саме це знаходять, розв'язуючи систему) не може складатися із трьох точок (у перетині може бути одна точка, нескінченна кількість точок або не бути жодної точки взагалі).

Відповідь: наведена система не може мати мати рівно три розв'язки.

4. Знайдіть всі такі пари чисел x і y, що $(2x^2-8x+11)(y^2+2y+8)=21$.

Розв'язання. Виділимо у дужках повні квадрати:

$$2x^2-8x+11=2\left(x^2-4x+4\right)+3=2(x-2)^2+3\geqslant 3,$$
$$y^2+2y+8=\left(y^2+2y+1\right)+7=(y+1)^2+7\geqslant 7.$$

Тепер зрозуміло, що перший співмножник не менший за 3, а другий — за 7. Тому їх добуток рівний 21 лише у випадку, коли $x-2=0$ і $y+1=0$.

Відповідь: $x=2$, $y=-1$.

5. Спростіть значення виразу: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$.

Розв'язання. Виконаємо наступні перетворення:

$$4+\sqrt{7}=\frac{7}{2}+2\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{3}$$

Аналогічно

$$4-\sqrt{7}=\frac{7}{2}-2\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Тому початковий вираз можна перетворити так:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\sqrt{2}=2\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0.$$

Відповідь: 0.

Наведемо також інший розв'язок, який не використовує штучні перетворення (3).

Розв'язання. Нехай $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=x$, тоді

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=x+\sqrt{2}.$$

Піднесемо обидві частини до квадрату і розкриємо дужки. Маємо:

$$(4+\sqrt{7})-2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}+(4+\sqrt{7})=x^2+2x\sqrt{2}+2$$

або після спрощення

$$8-2\sqrt{4^2-\sqrt{7}^2}=x^2+2x\sqrt{2}+2,$$
$$x^2+2x\sqrt{2}=0.$$

З останнього рівняння знаходимо, що $x=0$ або $x=-2\sqrt{2}$, але один із цих варіантів не підходить, бо початковий вираз має **єдине** значення. Випадок $x=-2\sqrt{2}$ швидко призводить до суперечності. Дійсно, якщо $x=-2\sqrt{2}$, то

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2},$$
$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=-\sqrt{2}$$

і ліва частина останнього виразу додатна, а права — від'ємна. Тому $x=0$.

Відповідь: 0.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2000 року

1. Розв'яжіть рівняння: а)$\frac{(2|x|-1)^2+7|x|-2}{4x-1}=0$; б)$|8-\sqrt{p}|+|\sqrt{p}+4|=12$.

   Розв'язання. а) Зазначивши, що $4x-1\neq 0$, маємо: $(2|x|-1)^2+7|x|-2=0$. Далі зробимо заміну $|x|=t$ і перейдемо до рівняння: $(2t-1)^2+7t-2=0$, розв'язавши яке, знаходимо: $t_1=-1$, $t_2=\frac{1}{4}$. Оскільки $|x|=t\geqslant 0$, то $t_1=-1$ не підходить, отже, $|x|=\frac{1}{4}$; звідки $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=-\frac{1}{4}$. Але умову $4x-1\neq 0$ задовольняє лише $x=-\frac{1}{4}$.

   б) Оскільки $\sqrt{p}+4>0$, то модуль на другому доданку можна прибрати: $|8-\sqrt{p}|+\sqrt{p}+4=12$ або $|8-\sqrt{p}|=8-\sqrt{p}$. Тепер бачимо, що остання рівність має місце, коли $8-\sqrt{p}\geqslant 0$, тобто при $p\in[0,64]$.

   Відповідь: а) $x=-\frac{1}{4}$, б) $p\in[0,64]$.

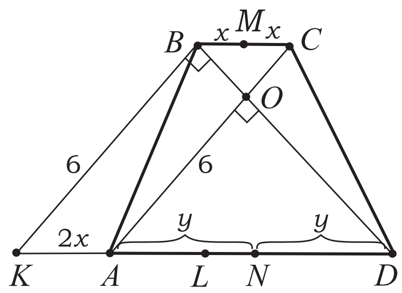
2. При кожному значенні a розв'яжіть систему: $\begin{cases}(a+1)x+3y=4a-5,\\(2a-3)x+y=a-1.\end{cases}$

   Розв'язання. Знайдемо значення y з другого рівняння $y=(a-1)-(2a-3)x$ і підставимо його у перше: $(a+1)x+3(a-1)-3(2a-3)x=4a-5$. Після спрощення одержуємо: $5x(2-a)=a-2$. Якщо $a=2$, то розв'язком останнього рівняння буде довільне значення x (а y визначатиметься рівністю $y=(a-1)-(2a-3)x$), якщо ж $a\neq 2$, то $x=-\frac{1}{5}$ і тоді $y=(a-1)+\frac{(2a-3)}{5}=\frac{7a-8}{5}$.

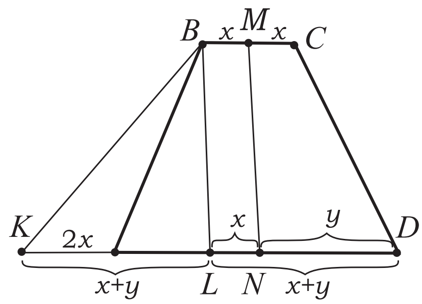
   Відповідь: при $a=2$ розв'язки такі: x — довільне число, $y=(a-1)-(2a-3)x$; при інших значеннях a розв'язки такі: $x=-\frac{1}{5}$, $y=\frac{7a-8}{5}$.

3. Діагоналі трапеції взаємноперпендикулярні. Одна з них дорівнює 6. Відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює $9/2$. Знайдіть іншу діагональ.

Розв'язання. Нехай діагональ $AC = 6$, а основи $BC = 2x$, $AD = 2y$. Виконаємо добудову: проведемо через вершину B пряму, паралельну діагоналі AC, до перетину з прямою DA у точці K, тобто $KB||AC$. Крім цього $BC||KA$, тому чотирикутник $KBCA$ — паралелограм, звідки $KB = AC = 6$, $KA = 2x$ і $KD = 2x + 2y$. З іншого боку, оскільки прямі KB і AC паралельні, то $\angle AOD = \angle KBD = 90°$, отже, $\triangle KBD$ — прямокутний трикутник.



Доведемо, що відрізок MN, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює медіані прямого кута $\triangle KBD$. Дійсно, якщо L — середина KD, то $LD = \frac{KD}{2} = x + y$ і $LN = LD - ND = x$. Це означає, що відрізки BM і LN рівні і паралельні, тому $LBMN$ — паралелограм і $MN = BL = \frac{9}{2}$. Таким чином, у прямокутному трикутнику KBD медіана BL прямого кута дорівнює $9/2$, тому, за відомою властивістю, гіпотенуза KD рівна 9. Тепер для знаходження діагоналі BD залишилося скористатися теоремою Піфагора: $BD^2 = 9^2 - 6^2 = 45$.



Відповідь: $3\sqrt{5}$.

4. При якому a рівняння $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ має корені і один з них є квадратом іншого?

Розв'язання. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння, тоді за умовою задачі $x_1 = x_2^2$. Крім цього, за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4}, \\ x_1 \cdot x_2 = a^3. \end{cases} \tag{4}$$

Враховуючи рівність $x_1 = x_2^2$ у другому рівнянні системи (4), маємо $x_2^2 \cdot x_2 = a^3$; звідки $x_2 = a$ і $x_1 = a^2$. Підставляючи ці значення у перше рівняння системи (4), отримуємо: $a^2 + a = \frac{15}{4}$, тобто $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$. Таким чином, числа $x_1 = a^2$ і $x_2 = a$ задовольняють систему (4) при знайдених значеннях a, тому за оберненою теоремою Вієта вони є коренями початкового квадратного рівняння.

Відповідь: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$.

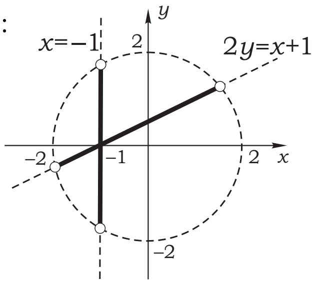
5. Побудуйте графік рівняння: $\frac{x^2-4+(x-y+1)^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$.

Розв'язання. Не забуваючи про умову $4 - x^2 - y^2 > 0$, помножимо обидві частини рівності на $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$:

$$x^2 - 4 + (x - y + 1)^2 + 4 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{або} \quad (x - y + 1)^2 = y^2.$$

З останньої рівності знаходимо, що $y = x - y + 1$ або $y = -(x - y + 1)$. Отже, одержуємо рівняння двох прямих: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ та $x = -1$, точки яких, за рахунок умови $x^2 + y^2 < 4$, мають належати кругу радіуса $R = 2$ з центром у початку координат.

Відповідь:



Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2001 року

1. Два пішоходи A і B вийшли одночасно назустріч один одному із міст M і N і не змінювали швидкості під час руху. До моменту зустрічі A пройшов на 6 км більше, ніж B. Якщо кожен з них буде продовжувати рухатись, то A попаде в місто N через $9/2$ год, а B у M — через 8 год після зустрічі. Визначте відстань між містами M та N.

   Розв'язання. Нехай S — відстань між містами, а v_A і v_B — швидкості пішоходів. Оскільки $v_A + v_B$ — швидкість зближення пішоходів, то час до зустрічі становить $t = \frac{S}{v_A+v_B}$ і за цей час пішохід A пройшов відстань $\frac{S \cdot v_A}{v_A+v_B}$, а пішохід B — $\frac{S \cdot v_B}{v_A+v_B}$. Тоді за умовою задачі

$$\frac{Sv_A}{v_A + v_B} - \frac{Sv_B}{v_A + v_B} = 6 \quad \text{або} \quad S = 6 \cdot \frac{v_A + v_B}{v_A - v_B}. \tag{5}$$

   Відстань від місця зустрічі до N пішохід A подолає за $\frac{S \cdot v_B}{(v_A+v_B)v_A} = \frac{9}{2}$ год, а пішоходу B, щоб потрапити в M, знадобиться $\frac{S \cdot v_A}{(v_A+v_B)v_B} = 8$ год. Поділивши дві останні рівності одна на одну, знаходимо, що $\frac{v_B^2}{v_A^2} = \frac{9}{16}$ або $v_B = \frac{3}{4}v_A$. Підставляючи це значення у рівність (5), знаходимо, що $S = 42$ км.

   Відповідь: 42 км.

2. При яких значеннях a рівняння $(a+3)x^2 + (3a+9)x - 2a^2 - 6a = 0$ має більше одного кореня?

   Розв'язання. Якщо $a + 3 \neq 0$, то подане рівняння є квадратним і має більше одного кореня, коли $D > 0$. Маємо:

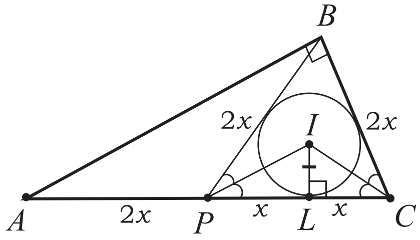
$$D = (3a+9)^2 + 4(a+3)(2a^2+6a) = 9(a+3)^2 + 8a(a+3)^2 = (a+3)^2(9+8a) > 0.$$

   Оскільки $(a + 3)^2 > 0$ (нагадаємо, що $a + 3 \neq 0$), то остання нерівність виконується при $a > -\frac{9}{8}$.

   Розглянемо другий випадок: $a + 3 = 0$. Тоді початкове рівняння набуває вигляду $0 = 0$ і має більше одного розв'язку (кожне число є розв'язком).

   Відповідь: $a = -3$ або $a > -\frac{9}{8}$.

3. Точка P прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) ділить гіпотенузу AC навпіл, а точка дотику сторони CP до кола, вписаного у трикутник CBP, ділить AC у відношенні $3:1$, якщо рахувати від вершини A. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.



Розв'язання. Нехай гіпотенузу $AC = 4x$, а L — точка дотику вписаного кола до PC, тоді $CL = \frac{1}{4}AC = x$, $AP = 2x$ і $PL = x$. Бачимо, що вписане коло трикутника CBP дотикається сторони CP в її середині, тому $\triangle PIL = \triangle CIL$ за двома катетами, а отже, $\angle IPC = \angle ICP$. Оскільки центр вписаного кола лежить на бісектрисах кутів, то PI, CI — бісектриси і тому $\angle BPC = \angle BCP$. Таким чином, трикутник CBP рівнобедрений і $BP = BC$.

З іншого боку, медіана BP прямого кута трикутника ABC дорівнює половині гіпотенузи AC, тому $BP = \frac{1}{2}AC = PC$. Отже, у трикутнику CBP всі сторони рівні, тому $\angle C = 60^\circ$ і $\angle A = 30^\circ$.

Відповідь: $30^\circ, 60^\circ$.

4. Спростіть:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Розв'язання. Виконаємо дії послідовно:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Тепер обчислимо наступний добуток:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

І, нарешті, останньою дією знаходимо:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-3} = \sqrt{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$.

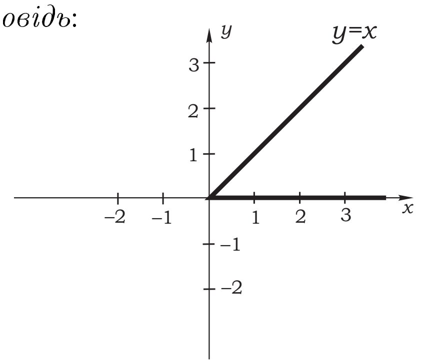
5. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $\sqrt{x^2-y^2}=x-\sqrt{y}^2$.

Розв'язання. Зазначивши, що $y \geqslant 0$, маємо рівняння: $\sqrt{x^2-y^2}=x-y$. Піднесемо обидві частини до квадрату, але спочатку зауважимо, що $x-y \geqslant 0$ та $x^2-y^2 \geqslant 0$. Маємо:

$$x^2-y^2=(x-y)^2. \qquad (6)$$

Оскільки права частина рівності (6) є невід'ємною, то умова $x^2-y^2 \geqslant 0$ виконується автоматично і перевірки не вимагає (на відміну від умов $x-y \geqslant 0$ та $y \geqslant 0$, які є істотними). Повертаючись до рівності (6), після спрощення дістаємо: $y(y-x)=0$; тобто маємо рівняння двох прямих: $y=0$ та $y=x$.

Відповідь:



6. Що більше: 5^{99} чи 2^{234} ?

Розв'язання. Оскільки $5^3=125$, а $2^7=128$, то $5^3<2^7$, звідки $\left(5^3\right)^{33}<\left(2^7\right)^{33}$. Тепер легко встановлюємо, що $5^{99}<2^{231}<2^{234}$.

Відповідь: $5^{99}<2^{234}$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2002 року

1. Скоротіть дріб $\frac{x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}$ при умові, що $x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1 \neq 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що знаменник дробу містить 16 доданків (а не 15, як може здатися!), а чисельник — 48 доданків. Це означає, що всі доданки чисельника можна розбити на три групи по 16 доданків в кожній. Маємо:

$$\frac{1+x+\ldots+x^{47}}{1+x+\ldots+x^{15}}=\frac{\left(1+\ldots+x^{15}\right)+\left(x^{16}+\ldots+x^{31}\right)+\left(x^{32}+\ldots+x^{47}\right)}{1+x+\ldots+x^{15}}.$$

Тепер зрозуміло, що з кожної дужки чисельника можна виділити знаменник і скоротити на нього, тому початковий дріб дорівнює:

$$\frac{\left(1+\ldots+x^{15}\right)+x^{16}\left(1+\ldots+x^{15}\right)+x^{32}\left(1+\ldots+x^{15}\right)}{1+x+\ldots+x^{15}}=1+x^{16}+x^{32}.$$

Відповідь: $1+x^{16}+x^{32}$

2. Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{8}-\sqrt{11+2\sqrt{24}}-\sqrt{28-10\sqrt{3}}}$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вираз $(27-10\sqrt{2})$. Виділяючи формулу квадрата різниці, знаходимо: $27-10\sqrt{2}=25-2\cdot5\cdot\sqrt{2}+2=(5-\sqrt{2})^2$. Так само перетворимо інші підкореневі вирази:

$$8-2\sqrt{12}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2,\quad 11+2\sqrt{24}=(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2,\quad 28-10\sqrt{3}=(5-\sqrt{3})^2.$$

Підставляючи ці значення у початковий дріб, отримуємо:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}-\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{8}-\sqrt{11+2\sqrt{24}}-\sqrt{28-10\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{6}+(5-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{8}-(\sqrt{8}+\sqrt{3})-(5-\sqrt{3})}=\frac{-5}{5}=-1.$$

Відповідь: -1.

3. При яких a один з коренів рівняння $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ у два рази більший за другий корінь?

   Розв'язання. Якщо $a^2-5a+3=0$, то отримаємо лінійне рівняння, яке має лише один корінь. Тому далі вважатимемо, що $a^2-5a+3\neq0$ і задане в умові рівняння є квадратним. Нехай x_1,x_2 — його рівняння, тоді за умовою задачі $x_1=2x_2$. Крім цього, за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{3a-1}{a^2-5a+3}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{2}{a^2-5a+3}. \end{cases} \tag{7}$$

   Враховуючи рівність $x_1=2x_2$ у першому і другому рівняннях системи (7), знаходимо, що

$$\begin{cases} x_2=-\frac{3a-1}{3(a^2-5a+3)}, \\ x_2^2=\frac{1}{a^2-5a+3}. \end{cases}$$

   Підставляючи значення x_2 з першого рівняння системи у друге, отримуємо:

$$\frac{(3a-1)^2}{9(a^2-5a+3)^2}=\frac{1}{a^2-5a+3}\quad\text{або}\quad(3a-1)^2=9(a^2-5a+3).$$

   Звідки маємо, що $a=\frac{2}{3}$. Зазначимо, що при $a=\frac{2}{3}$ умова $a^2-5a+3\neq0$ виконується. Отже, при $a=\frac{2}{3}$ числа $x_2=\frac{-(3a-1)}{3(a^2-5a+3)}$ і $x_1=2x_2$ задовольняють систему (7), тому за оберненою теоремою Вієта вони є коренями початкового квадратного рівняння.

   Відповідь: $a=\frac{2}{3}$.

4. Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння: $x^2+xy-2y^2-x+y=3$.

   Розв'язання. Розкладемо ліву частину на множники. Маємо:

$$(x^2-y^2)+(xy-y^2)-(x-y)=3\quad\text{або}\quad(x-y)(x+2y-1)=3.$$

   Число 3 може бути розкладено на два цілі множники лише одним з наступних чотирьох способів: $3=3\cdot1$, або $3=1\cdot3$, або $3=(-3)\cdot(-1)$, або $3=(-1)\cdot(-3)$, тобто маємо чотири системи:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x+2y-1=1, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=1, \\ x+2y-1=3, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=-3, \\ x+2y-1=-1, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=-1, \\ x+2y-1=-3. \end{cases}$$

   Розв'язуючи ці системи, знаходимо такі пари цілих чисел (x,y): $(2,1)$, $(-2,1)$.

   Відповідь: $(2,1)$, $(-2,1)$.

5. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{|x-1|-|x+1|}{|x+1|+|x-1|}$.

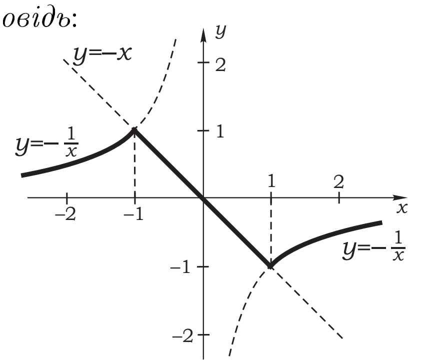
Розв'язання. Розглянемо випадки.

I випадок $x \leqslant -1$**.** Тоді $y = \frac{-(x-1)+(x+1)}{-(x+1)-(x-1)} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$.

II випадок $-1 \leqslant x \leqslant 1$**.** Тоді $y = \frac{-(x-1)-(x+1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{-2x}{2} = -x$.

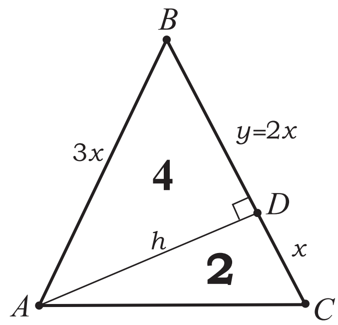
III випадок $1 \leqslant x$**.** Тоді $y = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)+(x-1)} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$.

Відповідь:



6. Висота AD, опущена на бічну сторону BC рівнобедреного трикутника ABC, ділить його на трикутники ABD і ADC площею 4 см^2 і 2 см^2 відповідно. Знайдіть сторони трикутника, якщо AC — його основа.

Розв'язання. Позначимо $AD = h$, $CD = x$, а $DB = y$. Оскільки площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів, то $S_{ABD} = \frac{1}{2}hy = 4$ і $S_{ADC} = \frac{1}{2}hx = 2$. Поділивши одну рівність на іншу, одержимо, що $y = 2x$; тому $AB = BC = 3x$. Далі використаємо теорему Піфагора для трикутника ABD: $h^2 + (2x)^2 = (3x)^2$, звідки $h = \sqrt{5}x$. Повертаючись до формули $S_{ADC} = \frac{1}{2}hx = 2$, знаходимо: $\frac{1}{2}\sqrt{5}x^2 = 2$, тому $x = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{5}}}$ і $AB = BC = \frac{6}{\sqrt{\sqrt{5}}}$. Залишилося знайти сторону AC. За теоремою Піфагора $AC = \sqrt{5x^2 + x^2} = \sqrt{6}x = \sqrt{\frac{24}{\sqrt{5}}}$.



Відповідь: $AB = BC = \frac{6}{\sqrt{\sqrt{5}}}$ см, $AC = \sqrt{\frac{24}{\sqrt{5}}}$ см.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2003 року

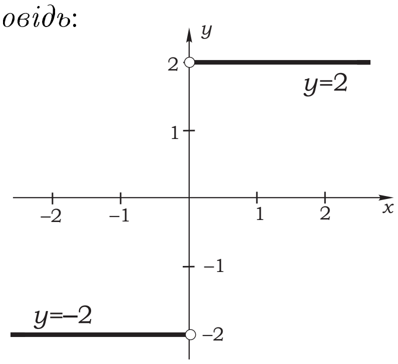
1. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = \frac{x^2+1}{x\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2+1}}$.

Розв'язання. Спочатку перетворимо підкореневий вираз:

$$\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 + 1 = \frac{\left(x^2-1\right)^2 + 4x^2}{4x^2} = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Тепер задану функцію можна переписати у вигляді: $y = \frac{x^2+1}{x \cdot \frac{x^2+1}{|2x|}}$ або, після скорочення на $x^2+1 \neq 0$, у вигляді: $y = \frac{|2x|}{x}$. Отже, при $x > 0$ маємо: $y = 2$, а при $x < 0$ маємо, що $y = -2$.

Відповідь:



2. Складіть рівняння, коренями якого будуть числа $x_1 + 1$ та $x_2 + 1$, де x_1, x_2 — корені рівняння: $x^2 - 3x - 1 = 0$.

   Розв'язання. Оскільки квадратне рівняння $x^2-3x-1 = 0$ має корені ($D = 13 > 0$), то за теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = -1. \end{cases}$ Тоді числа $y_1 = x_1+1$ і $y_2 = x_2+1$ будуть задовольняти систему

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = (x_1+1) + (x_2+1) = 5, \\ y_1 \cdot y_2 = (x_1+1)(x_2+1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3. \end{cases}$$

   Отже, за оберненою теоремою Вієта числа $y_1 = x_1 + 1$ і $y_2 = x_2 + 1$ будуть коренями квадратного рівняння $y^2 - 5y + 3 = 0$.

   Відповідь: $y^2 - 5y + 3 = 0$.

3. Знайдіть найменше значення виразу: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 8x + 16}$.

   Розв'язання. Позначимо даний вираз через y, тоді після спрощення маємо:

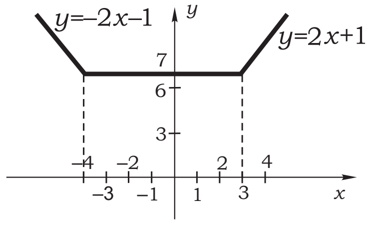
$$y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2} = |x-3| + |x+4|. \tag{8}$$

   Побудуємо графік рівняння (8). Для цього розкриємо модулі, розглянувши такі випадки:

   I $x \leqslant -4$**.** Тоді $y = -(x-3) - (x+4) = -2x - 1$.

   II $-4 \leqslant x \leqslant 3$**.** Тоді $y = -(x-3) + (x+4) = 7$.

   III $3 \leqslant x$**.** Тоді $y = (x-3) + (x+4) = 2x + 1$.



   З побудованого графіка бачимо, що найменше значення y дорівнює 7 і досягається при $-4 \leqslant x \leqslant 3$.

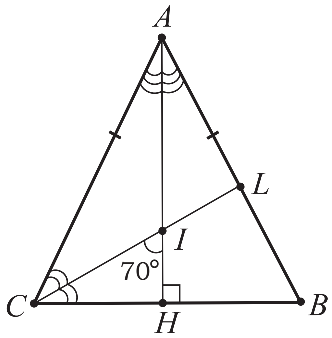
   Відповідь: 7.

4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x+3y+4z=6, \\ 3x-5y-2z=4, \\ -5x+2y+5z=3. \end{cases}$

Розв'язання. З першого рівняння системи знаходимо: $x = 6 - 3y - 4z$. Підставляючи це значення x у інші рівняння системи і виконуючи спрощення, приходимо до системи: $\begin{cases} y+z=1, \\ 17y+25z=33. \end{cases}$ Виражаючи з першого рівняння останньої системи y через z і підставляючи це значення $y = 1 - z$ у друге рівняння, отримуємо: $17(1-z)+25z=33$ або $z=2$. Тому $y=-1$, $x=1$.

Відповідь: $(1,-1,2)$.

5. *Розв'язання.* У рівнобедреному трикутнику кут між бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі дорівнює 70°. Знайдіть кути трикутника.

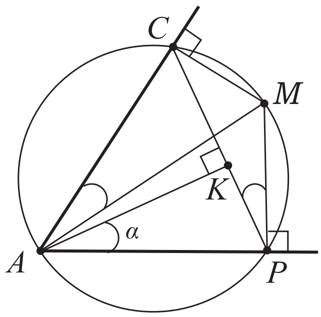


Розв'язання. Нехай бісектриси AH і CL перетинаються у точці I. Оскільки у рівнобедреному трикутнику ABC бісектриса AH є одночасно і висотою, то $\angle AHC = 90°$. Тоді з трикутника CHI знаходимо, що $\angle HCI = 20°$ і тому $\angle C = 40°$.

Відповідь: 40°, 40°, 100°.

6. З довільної точки M всередині гострого кута з вершиною A опущено перпендикуляри MP і MC на сторони кута. З точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PC. Знайдіть $\angle MAC$, якщо $\angle PAK = \alpha$.

Розв'язання. Оскільки сума протилежних кутів чотирикутника $ACMP$ дорівнює 180° ($\angle ACM = \angle APM = 90°$), то навколо $ACMP$ можна описати коло. Тоді кути MAC і CPM рівні, як вписані кути, що спираються на спільну дугу кола. Але $\angle CPM = 90° - \angle APK$, а з $\triangle APK$ маємо, що $90° - \angle APK = \angle PAK = \alpha$. Отже, $\angle CPM = \alpha$ і $\angle MAC = \alpha$.



Відповідь: α.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2004 року

1. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}}}$.[1]

[1]Стосовно умови (та й розв'язку) цієї задачі природно виникають питання, наприклад: "Як учень 8-го класу має розуміти нескінченну кількість квадратних коренів і які властивості таких записів вважати відомими?" Розуміючи це, приймальна комісія УФМЛ КУ оцінювала цю задачу меншою кількістю балів, ніж решту, та зараховувала її як розв'язану і тим абітурієнтам, які ставили подібні запитання по умові.

Розв'язання. Покладемо $x = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}}}$, тоді $x > 0$. Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$x^2 = 5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}} \quad \text{або} \quad x^2 = 5+x,$$

бо вираз $\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}}$ також рівний x. Розв'язуючи квадратне рівняння $x^2 = 5+x$, знаходимо, що $x = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Серед цих двох значень x додатнім є лише $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Відповідь: $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

2. При яких цілих значеннях a рівняння $2x^2+ax+8=0$ має раціональні корені, сума яких є цілим числом?

   Розв'язання. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $2x^2+ax+8=0$, тоді за теоремою Вієта $x_1+x_2 = -\frac{a}{2}$. Оскільки $x_1+x_2 = b$ — ціле число, то $a = -2b$. Підставляючи це значення a у рівняння, отримуємо: $x^2+bx+4=0$. Оскільки x_1 — раціональне число, то його можна подати у вигляді $x_1 = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Підставляючи $x_1 = \frac{m}{n}$ у квадратне рівняння, маємо:

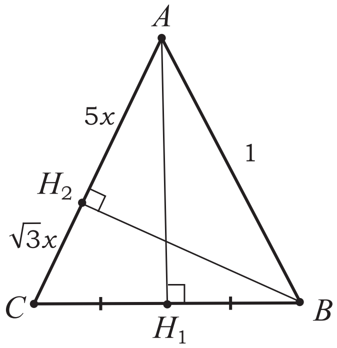
   $$\frac{m^2}{n^2} + b\frac{m}{n} + 4 = 0 \quad \text{або} \quad \frac{m^2}{n} + bm + 4n = 0. \tag{9}$$

   Маємо, що m^2 ділиться на n, отже, $n = 1$, бо дріб $\frac{m}{n}$ — нескоротний, тобто числа m, n не мають спільних натуральних дільників, окрім одиниці. Таким чином, рівняння (9) набуває вигляду $m^2+bm+4=0$ або $m+b+\frac{4}{m}=0$. З останнього випливає, що число m є дільником 4, тобто m одне із чисел: $\pm1, \pm2, \pm4$. Якщо $m = 1$, то $b = -5$, $a = -10$, $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$. Розглядаючи аналогічно інші варіанти, знаходимо всі можливі значення a.

   Відповідь: $a = \pm8$, $a = \pm10$.

3. У трикутнику ABC висота AH_1 ділить сторону BC у відношенні $1:1$, а висота BH_2 ділить сторону AC у відношенні $5:\sqrt{3}$, рахуючи від вершини A (точки H_1, H_2 — основи висот). Знайдіть довжину висоти BH_2, якщо $AB = 1$.

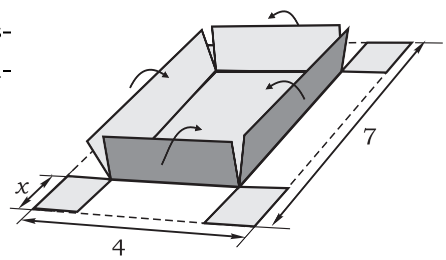
   Розв'язання. Оскільки основа висоти AH_1 є серединою сторони CB, то висота AH_1 є і медіаною, тому трикутник ABC рівнобедрений ($AB = AC = 1$). Якщо позначити $AH_2 = 5x$, $H_2C = \sqrt{3}x$, то $\left(5+\sqrt{3}\right)x = 1$ і $x = \frac{1}{5+\sqrt{3}}$. Тепер за теоремою Піфагора для $\triangle ABH_2$ знаходимо, що $BH_2^2 = AB^2 - AH_2^2 = 1 - \frac{25}{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}$.

   Відповідь: $BH_2 = \sqrt{1 - \frac{25}{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}}$.

4. Із прямокутного шматка жерсті треба виготовити деко, площа якого втричі більша від площі бічних стінок. Якою має бути висота стінок дека, якщо шматок жерсті має розміри 4 дм на 7 дм?

Розв'язання. Нехай висота стінок дека дорівнює x. Тоді площа дека S_1 і площа бічних стінок S_2 становлять:



$$S_1 = (4-2x)(7-2x) = 4x^2 - 22x + 28,$$
$$S_2 = 2x((4-2x)+(7-2x)) = 22x - 8x^2.$$

За умовою задачі $S_1 = 3S_2$, тому маємо рівняння: $4x^2 - 22x + 28 = 66x - 24x^2$; звідки $x = \frac{11\pm6\sqrt{2}}{7}$. Але зрозуміло, що висота стінок x не може перевищувати половину ширини шматка жесті, тобто $x \leqslant 2$, а цю умову задовольняє лише $x = \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$.

Відповідь: $\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$ дм.

5. При яких значеннях a система $\begin{cases} ax^2 - xy = x+4, \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

Розв'язання. З другого рівняння знаходимо, що $y = 2x-5$, і, підставивши це значення y у перше рівняння системи, одержуємо: $ax^2 - x(2x-5) = x+4$, що після спрощення набуває вигляду:

$$(a-2)x^2 + 4x - 4 = 0. \qquad (10)$$

По кожному розв'язку x рівняння (10) можна знайти єдине значення y (нагадаємо, що $y = 2x-5$), тому початкова система має єдиний розв'язок — пару (x, y) — тоді і лише тоді, коли єдиний розв'язок має рівняння (10). При $a \neq 2$ квадратне рівняння (10) має єдиний розв'язок, коли $D = 16 + 16(a-2) = 0$; звідки знаходимо $a = 1$ і $x = 2, y = -1$. При $a = 2$ рівняння (10) набуває вигляду $4x - 4 = 0$ і, очевидно, має єдиний розв'язок $x = 1$; в цьому випадку $y = -3$.

Відповідь: при $a = 1$ єдиним розв'язком системи є пара $x = 2, y = -1$; а при $a = 2$ розв'язок — $x = 1, y = -3$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2005 року

1. Знайдіть всі такі пари чисел (x, y), що $9x^2 - 24xy + 16y^2 + |y-3| = 0$.

Розв'язання. Виділяючи у лівій частині рівняння квадрат різниці, отримуємо: $(3x-4y)^2 + |y-3| = 0$. Сума невід'ємних чисел $(3x-4y)^2$ і $|y-3|$ рівна нулю тоді і лише тоді, коли $3x - 4y = 0$ і $y - 3 = 0$, тобто $x = 4$, $y = 3$.

Відповідь: $(4, 3)$.

2. При яких значеннях a рівняння $\frac{2}{ax-3a} + \frac{3}{ax+a-x-1} = \frac{x-5}{ax^2-2ax-3a}$ має корінь, не менший 5.

Розв'язання. Розкладемо знаменники дробів на множники

$$\frac{2}{a(x-3)} + \frac{3}{(a-1)(x+1)} = \frac{x-5}{a(x+1)(x-3)}$$

і, врахувавши, що $a \neq 0$, $a \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq -1$, зведемо дроби до спільного знаменника

$$2(a-1)(x+1) + 3a(x-3) = (a-1)(x-5).$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо, що $x = \frac{2a+7}{4a-1}$ при $a \neq \frac{1}{4}$, а при $a = \frac{1}{4}$ рівняння розв'язків не має.

З'ясуємо, коли корінь $x = \frac{2a+7}{4a-1}$ задовольняє нерівність $x \geqslant 5$ (зауважимо, що при цьому виконуються умови $x \neq 3$, $x \neq -1$). Маємо: $\frac{2a+7}{4a-1} \geqslant 5$ або, після перетворень, $\frac{2-3a}{4a-1} \geqslant 0$. Остання нерівність виконується при $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$. На цьому проміжку виконуються і умови: $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Відповідь: $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$.

3. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння: $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

   Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0$ і розглянемо його як квадратне відносно змінної x (y вважаємо відомим і фіксованим). Тоді $D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) \geqslant 0$ або $3y^2 - 6y - 1 \leqslant 0$. Виділяючи повний квадрат, дістаємо: $3(y-1)^2 \leqslant 4$. Оскільки y — ціле число, то остання нерівність має місце лише при $y = 0$, або $y = 1$, або $y = 2$. Розглядаючи кожний випадок окремо, отримуємо:

   - при $y = 0$ маємо, що $x^2 - x = 0$, тому $x = 0$ або $x = 1$;
   - при $y = 1$ маємо, що $x^2 - 2x = 0$, тому $x = 0$ або $x = 2$;
   - при $y = 2$ маємо, що $x^2 - 3x + 2 = 0$, тому $x = 1$ або $x = 2$.

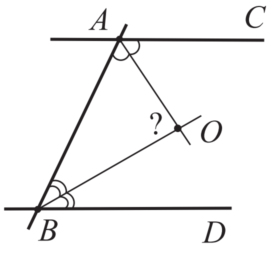
   Відповідь: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

4. У рівнобедреному трикутнику кут між бісектрисою кута при вершині і бісектрисою кута при основі дорівнює $70°$. Знайдіть кути трикутника.

   Розв'язання. Див. задачу 5 за 2003 рік.

   Відповідь: $40°$, $40°$, $100°$.

5. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів, які утворюються при перетині двох паралельних прямих третьою (січною).

   Розв'язання. Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів ABD і CAB дорівнює $180°$, то $\angle OAB + \angle OBA = \frac{\angle ABD}{2} + \frac{\angle CAB}{2} = 90°$. Тепер з трикутника AOB знаходимо, що $\angle AOB = 90°$.

   Відповідь: $90°$.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2006 року

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x} = 0$.

   Розв'язання. Одразу зазначимо, що $4 - x^2 \geqslant 0$ і $x < 0$. Тепер перенесемо доданок $\frac{1}{x}$ у праву частину рівняння і піднесемо обидві частини до квадрату: $4 - x^2 = \frac{1}{x^2}$. Оскільки права частина останньої рівності додатна, то такою буде і ліва частина; тому про умову $4 - x^2 \geqslant 0$ в подальшому можна не турбуватися. Розв'язуючи рівняння $4 - x^2 = \frac{1}{x^2}$, знаходимо, що $x_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Зважаючи на умову $x < 0$, одержуємо остаточну відповідь.

Відповідь: $x = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$ або $x = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$

   Розв'язання. Зазначимо, що при кожному значенні y вираз $1 + y + y^2 \neq 0$ (дискримінант рівняння $1 + y + y^2 = 0$ дорівнює $D = -3$), тому у першому рівняння помножимо обидві частини на знаменник дробу. Маємо:

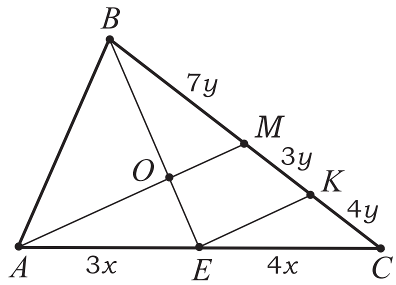
$$1 + x + x^2 = 3\left(1 + y + y^2\right). \qquad (11)$$

   Підставимо в (11) $x = 6 - y$ (див. друге рівняння системи) і розв'яжемо отримане квадратне рівняння. Отже, маємо: $y_1 = 2$, $y_2 = -10$, звідки $x_1 = 4$, $x_2 = 16$.

   Відповідь: $(4, 2)$, $(16, -10)$.

3. На стороні AC трикутника ABC взято таку точку E, що $AE : EC = 3 : 4$. У якому відношенні медіана AM ділить відрізок BE?

   Розв'язання. Зробимо добудову: проведемо через точку E пряму, паралельну медіані AM, до перетину зі стороною BC у точці K. Тоді, застосовуючи теорему Фалеса для кута ACM, маємо, що $AE : EC = MK : KC = 3 : 4$, тому $MK = 3y$, $KC = 4y$. Оскільки M — середина сторони BC, то $BM = 7y$. Далі, використовуючи теорему Фалеса для кута KBE, знаходимо, що $BO : OE = BM : MK = 7 : 3$.



   Відповідь: $7 : 3$.

4. Побудуйте на координатній площині графік рівняння: $x|y| + y|x| = 0$.

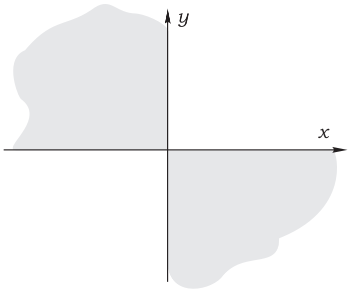
   Розв'язання. Для того, щоб розкрити модулі, розглянемо чотири випадки:

при $x \geqslant 0$ **та** $y \geqslant 0$ маємо, що $2xy = 0$, тому $x = 0$ або $y = 0$;

при $x \geqslant 0$ **та** $y \leqslant 0$ маємо, що $0 = 0$, тому x, y — довільні числа;

при $x \leqslant 0$ **та** $y \geqslant 0$ маємо, що $0 = 0$, тому x, y — довільні числа;

при $x \leqslant 0$ **та** $y \leqslant 0$ маємо, що $-2xy = 0$, тому $x = 0$ або $y = 0$.

Відповідь: 

5. Якого найменшого значення може набувати вираз: $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2$?

   Розв'язання. Позначимо даний вираз як y. Тоді, розкриваючи дужки і зводячи подібні доданки, отримуємо:

   $$y = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x^2 - 4x + 4) + 2 = 3(x-2)^2 + 2 \geqslant 2.$$

   Зауважимо, що при $x = 2$ в останній нерівності досягається рівність.

   Відповідь: 2.

Розв'язання екзаменаційних завдань з математики 2007 року

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$.

   Розв'язання. Використовуючи формулу $\sqrt{a^2} = |a|$ і формулу квадрата суми, отримуємо:

   $$\frac{\left|5-\sqrt{5}\right| + \left|5-\sqrt{3}\right|}{(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})} = \frac{10-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{4-3}} = \frac{10-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{6}.$$

   Відповідь: $\frac{10-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{6}$.

2. Розв'яжіть рівняння: $x|x| + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 20 = 0$.

   Розв'язання. Зазначимо, що $x \geqslant 0$, тому рівняння можна подати у вигляді: $x^2 + x - 20 = 0$; звідки $x_1 = 4$, $x_2 = -5$. Умову $x \geqslant 0$ задовольняє лише $x_1 = 4$.

   Відповідь: $x = 4$.

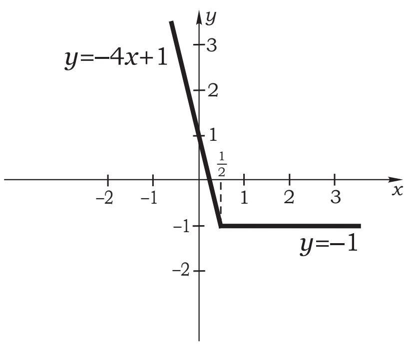
3. Побудуйте на координатній площині графік функції: $y = |2x-1| - 2x$.

   Розв'язання. Розглянемо два випадки.

   I випадок $2x - 1 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant \frac{1}{2}$. Тоді $y = (2x-1) - 2x = -1$.

   II випадок $2x - 1 \leqslant 0$, тобто $x \leqslant \frac{1}{2}$. Тоді $y = -(2x-1) - 2x = -4x + 1$.

Відповідь:



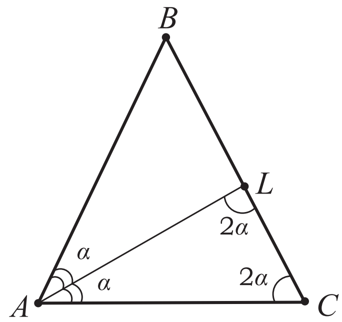
4. При яких значеннях a і b корені рівняння $x^2 + ax + b = 0$ дорівнюють $2a$ і $2b$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = b, \end{cases}$ де x_1, x_2 — корені рівняння. Якщо $x_1 = 2a$, $x_2 = 2b$, то система набуває вигляду: $\begin{cases} 2a + 2b = -a, \\ 2a \cdot 2b = b. \end{cases}$ З другого рівняння системи, отримуємо, що $b = 0$ або $a = \frac{1}{4}$. При $b = 0$ з першого рівняння системи знаходимо: $a = 0$; у другому випадку, коли $a = \frac{1}{4}$, з першого рівняння одержуємо, що $b = -\frac{3}{8}$.

Відповідь: $a_1 = b_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{3}{8}$.

5. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає бічну сторону під кутом, що дорівнює куту при основі. Знайдіть кути трикутника.

Розв'язання. Нехай $\angle A$ при основі рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 2α, а AL — бісектриса цього кута. Тоді $\angle CAL = \alpha$, $\angle ACB = 2\alpha$ і за умовою задачі $\angle ALC = 2\alpha$. Обчислюючи суму кутів $\triangle ALC$, знаходимо, що $5\alpha = 180°$ і $\alpha = 36°$.



Відповідь: 72°, 72°, 36°.

6 Відповіді до тренувальних варіантів

1981. **1.** 726 цифр. **2.** При довільних x, y, що мають різні знаки. **3.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **4.** $120°$. **5.** $10:3$.

1984. **1.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$. **2.** $180°$. **3.** $\frac{1}{9}$. **4.** Рис. 1984.

1985. **1.** $\frac{x^2}{1-x}$ при $x \neq \pm 1$. **2.** Рис. 1985. **3.** $-5 < b < 4$. **4.** $\sqrt{3}:1$. **5.** Тупокутний.

1986. **1.** Ромб. **2.** $20\sqrt{3}$. **3.** $22,5°$, $67,5°$. **4.** Рис. 1986. **5.** $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{57}{4}$.

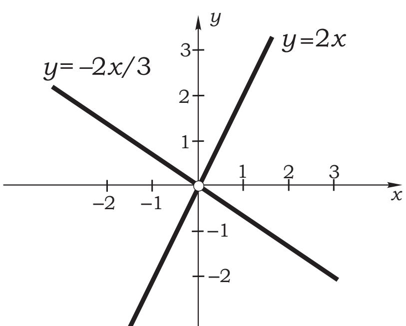


Рис. 1984

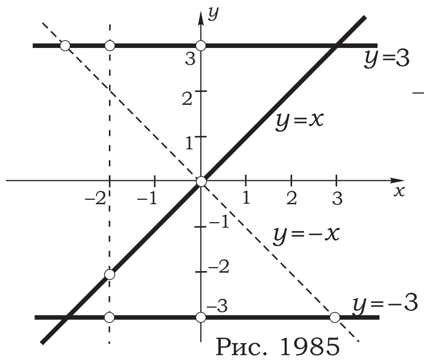


Рис. 1985

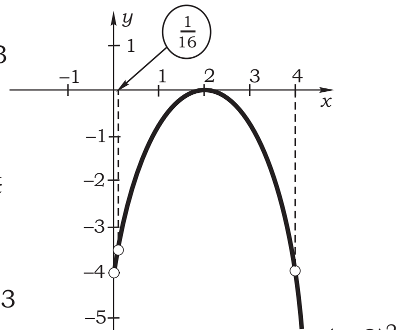


Рис. 1986

1987. **1.** Раціональне число дорівнює -4. **2.** $a = 1$. **3.** $18°, 72°$. **4.** $2:1$.

1988. **2.** Рис. 1988. $x > 1$. **4.** $15°$. **5.** $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

1989. **1.** Якщо проти третьої сторони лежить кут $90°$. **2.** 6 см. **3.** Рис. 1989а та Рис. 1989б. **4.** не існує. **5.** a — довільне число.

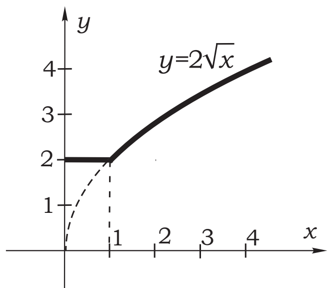


Рис. 1988

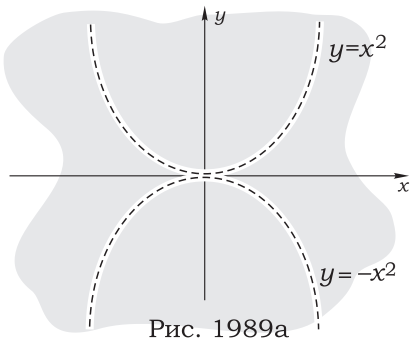


Рис. 1989а

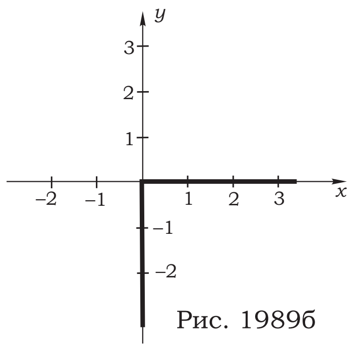


Рис. 1989б

1990. **2.** $15°$. **3.** $-\frac{9}{2}$. **5.** Ні.

1991. **2.** $\frac{5}{2}$. **3.** $b \in \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$. **4.** Так, наприклад, 22. **5.** При $b = -1$ або $b = -2$ коренів немає, при інших b корені такі: $x_1 = b$, $x_2 = -3 - b$.

1994. **1.** Так, наприклад, рівнобедрений прямокутний трикутник. **2.** $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. **3.** Розв'язками першої системи є пари чисел $(x, 4)$, де x — будь-яке число, а розв'язками рівняння $y^3 = 64$ — єдине число $y = 4$. Система лінійних рівнянь не може мати рівно два розв'язки. **4.** $x = -2, y = 3$. **5.** 0.

2000. **1а).** $x = \frac{1}{2}$. **1б).** $y \in [4, \infty)$. **2.** При $b = -2$ розв'язки такі: $x = \frac{2b+2-(2b+3)y}{4}$, y — довільне число; при інших значеннях b розв'язки такі: $x = \frac{7b+8}{10}$, $y = -\frac{2}{5}$. **3.** $\frac{13}{2}$. **4.** $a = \pm 5$. **5.** Рис. 2000.

2001. **1.** $p = \frac{24}{7}$ км. **2.** $m < \frac{3}{4}$ або $m = 5$. **3.** $\frac{7}{2}$ і 7. **4.** 32. **5.** Рис. 2001. **6.** $5^{111} > 11^{70}$.

2002. **1.** $1 + x^{12} + x^{24}$. **2.** 3. **3.** $b = \frac{2}{3}$. **4.** $x = 1$, $y = 1$. **5.** Рис. 2002. **6.** $8\sqrt{7}$ см^2.

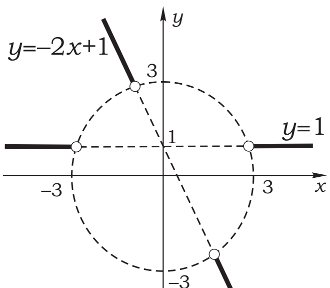


Рис. 2000

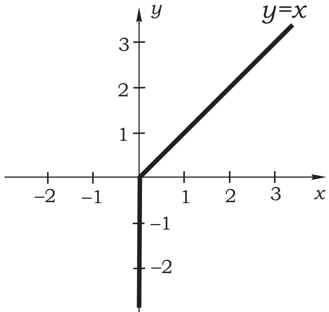


Рис. 2001

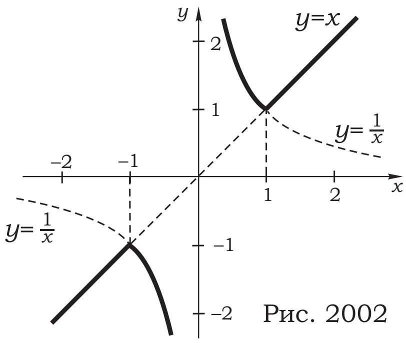


Рис. 2002

2003. **1.** Рис. 2003. **2.** $y^2 + 11y + 25 = 0$. **3.** 7. **4.** $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. **5.** $20°$, $80°$, $80°$. **6.** α.

2004. **1.** $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$. **2.** $a = \pm 12$, $a = \pm 20$. **3.** $AB = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{9+6\sqrt{5}}}$. **4.** $\frac{4-\sqrt{11}}{2}$ м. **5.** При $a = 2$ розв'язок $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{29}{7}$; при $a = -\frac{25}{12}$ розв'язок $x = \frac{6}{7}$, $y = \frac{23}{7}$.

2005. **1.** $x = 5$, $y = 2$. **2.** $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right]$. **3.** $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(1,-2)$, $(2,-1)$, $(2,-2)$. **4.** $50°$. **5.** $90°$.

2006. **1.** $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $x_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. **2.** $(2,1)$, $(3,2)$. **3.** $3:2$. **4.** Рис. 2006. **5.** 2.

2007. **1.** $\frac{1}{4-\sqrt{7}}$. **2.** $x = 5$. **3.** Рис. 2007. **4.** $p_1 = 0, q_1 = 0$; $p_2 = 4, q_2 = -12$. **5.** $60°$, $60°$, $60°$.

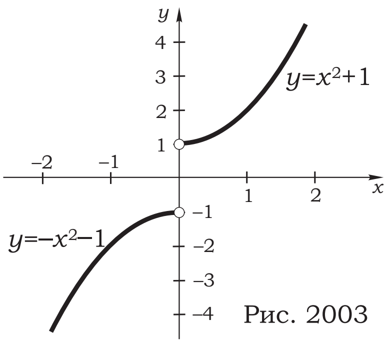


Рис. 2003

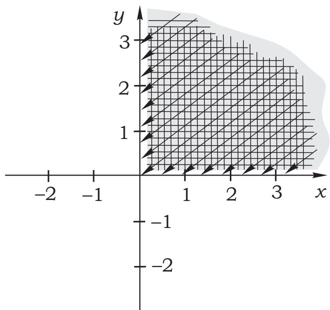


Рис. 2006

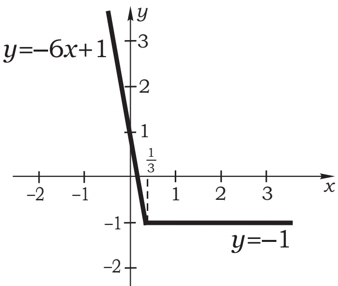


Рис. 2007

7 Література

1. *Я.И.Смыкало, Н.Н.Величко, К.В.Корсак, Л.М.Савченко* Республиканская специализированная школа-интернат физико-математического профиля при Киевском государственном университете им. Т.Г. Шевченко. Учебно-метод. пособие для поступающих. – К.: Учебно-производ. тип. КГУ, 1989. – 38с.

2. *Український* фізико-математичний ліцей Київського університету імені Тараса Шевченка довідник для вступників / Упорядники М.М.Величко, Л.М.Савченко, К.В.Корсак. – К.: ВПЦ "Київський університет", 1993. – 24с.

3. *В.М. Козира, О.В. Моховик, О.В. Добенько, В.О. Тадеєв* Збірник задач з математики для диференційованого навчання та конкурсного відбору учнів у спеціалізовані фізико-математичні школи (ліцеї, гімназії) на базі програми неповної середньої школи. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 48с.

4. *М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич* Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2006. – 301с.

Зміст