

Лекція №1

Повторення алгебри 7 класу.

Девіз : Пам'ятайте, якщо ви бажаєте навчитися плавати, то сміло заходьте у воду, а якщо бажаєте навчитися розв'язувати задачі, то сміло розв'яжіть їх.

Д.Пойа.

1. Лінійне рівняння з однією змінною

Означення:

Рівність, що містить змінні (невідомі), називається **рівнянням**.

Рівність, що містить одну змінну (невідому) величину називають **рівнянням з однією змінною**.

Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність називається **коренем рівняння**.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Основні властивості рівнянь:

Властивість 1. У будь-якій частині рівняння можна розкрити дужки або звести подібні доданки.

Властивість 2. Будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Властивість 3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне і те ж, відмінне від нуля число.

Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b – деякі відомі числа, а x – змінна, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Скільки коренів може мати лінійне рівняння з однією змінною $ax = b$?

Якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ – єдиний корінь рівняння;

якщо $a = 0$ і $b \neq 0$ – рівняння коренів немає;

якщо $a = 0$ і $b = 0$ – рівняння має безліч коренів.

ПРИКЛАД 1.

Розв'язати рівняння: $(a+9)x = a+9$

Розв'язання:

При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння буде будь-яке дійсне число. При $a \neq -9$ корінь рівняння $x = 1$.

ПРИКЛАД 2.

Розв'язати рівняння: $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) = 4x + 2\frac{1}{2}$.

Розв'язання:

$$\frac{2}{9}x - \frac{1}{3} = 4x + 2\frac{1}{2}; \quad \frac{2}{9}x - 4x = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2}; \quad 4x - 72x = 6 + 45; \quad x = -\frac{51}{68} = -\frac{3}{4}.$$

ПРИКЛАД 3.

Вранці вкладник зняв з рахунку в банку $\frac{2}{7}$ усіх грошей, а після обіду - 30% залишку. Після цього на його рахунку залишилося 175 грн. Який був початковий вклад?

Розв'язання:

Нехай x грн. – початковий вклад. Зранку вкладник зняв $\frac{2}{7}x$ грн., а після обіду: $\left(x - \frac{2}{7}x\right) \cdot 0,3$ грн. Одержимо рівняння: $x - \frac{2}{7}x - \left(x - \frac{2}{7}x\right) \cdot 0,3 = 175$
; $x - \frac{2}{7}x - 0,3x + \frac{3}{35}x = 175$; $\frac{5}{7}x - \frac{3}{10}x + \frac{3}{35}x = 175$; $50x - 21x + 6x = 175 \cdot 70$;
 $x = 350$ (грн.)

2. Степінь з натуральним показником.

Означення: Степенем числа a з натуральним показником n , ($n > 1$) називається добуток n множників, кожний з яких дорівнює a :
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, $n > 1$ (Тут a – основа степеня, n – показник степеня)

Властивості:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $a^1 = a, a^0 = 1$; | 4) $(a^m)^n = a^{mn}$; |
| 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; | 5) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; |
| 3) $a^m : a^n = a^{m-n}$; | 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$. |

Знак степеня з натуральним показником:

1. Якщо основа степеня $a = 0$, то $a^n = 0$ для будь-якого натурального n .
2. Якщо $a > 0$, то $a^n > 0$ для будь-якого натурального значення n .
3. Якщо $a < 0$ і n — число парне, то $a^n > 0$. Наприклад: $(-2)^4 = 16$, $(-1)^{100} = 1$.
4. Якщо $a < 0$ і n — число непарне, то $a^n < 0$. Наприклад: $(-3)^3 = -27$, $(-1)^{29} = -1$

ПРИКЛАД 4.

Обчисліть значення виразу; $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.

Розв'язання: $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 3^{10} \cdot 2^{20}} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 (2+5)}{2^{10} \cdot 3^9 (1+3 \cdot 2)} = \frac{1}{2}$.

ПРИКЛАД 5.

Що більше: 5^{99} чи 2^{234} ?

Розв'язання: $5^3=125$, а $2^7=128$, то $5^3 < 2^7 \Rightarrow (5^3)^{33} < (2^7)^{33} \Rightarrow 5^{99} < 2^{231}$, $2^{231} < 2^{234} \Rightarrow 5^{99} < 2^{234}$.

3. Цілі вирази

Цілими раціональними виразами називаються числові вирази, а також вирази із змінними, які можуть містити дії додавання, віднімання, множення та піднесення змінних до натурального степеня. До цілих раціональних виразів відносяться одночлени та многочлени.

Означення: **Одночленом** називають добуток чисел, змінних і їх натуральних степенів.

Наприклад $6a$, $5ab^2$, x , $-3xyz$.

Означення: **Степенем одночлена** називають суму показників степенів усіх буквених множників, що входять в одночлен.

Наприклад, степінь одночлена $5x^3yz^2$, дорівнює $3+1+2=6$.

Означення: **Многочленом** називають алгебраїчну суму кількох одночленів.

Наприклад, $4xy + ab + 3,7bx^2 - 3xy$.

Члени многочлена, які відрізняються тільки коефіцієнтами, є **подібними**.

Зведення подібних членів – це спрощення многочлена шляхом заміни суми подібних членів одним членом. Так, у многочлені $4a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 4ab^2$ подібні перший і третій, також другий і четвертий члени.

Щоб **помножити одночлен на одночлен**, треба перемножити їх коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами.

Наприклад, $(11a^2y) \cdot (-2ab^2y^2) = -22a^3b^2y^4$.

Щоб **піднести одночлен до степеня**, треба піднести його коефіцієнт до цього степеня і помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого підноситься одночлен.

Наприклад, $(-3ab^2x^3)^2 = 9a^2b^4x^6$.

ПРИКЛАД 6.

Спростити вираз: $-(-2c^2d^5)^7 \cdot (-\frac{1}{2}c^4d^5)^4$

Розв'язання:

$$-\left(-2c^2d^5\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4 = 2^7 c^{2 \cdot 7} d^{5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^4} c^{4 \cdot 4} d^{5 \cdot 4} = 2^{7-4} c^{14+16} d^{35+20} = 8c^{30}d^{55}.$$

Щоб **поділити одночлен на одночлен**, треба поділити коефіцієнти діленого на коефіцієнт дільника, до знайденої частини приписати множниками кожну букву діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї букви у діленому і дільнику.

Наприклад, $(8x^6y^3z^{10}) : (4x^2yz^6) = 2x^4y^2z^4$.

При **додаванні і відніманні многочленів** користуються правилом розкриття дужок.

Наприклад,

$$1) (2x^2 - 2x + 5) + (5x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 2x + 5 + 5x^2 + 5x - 3 = 7x^2 + 7x + 2;$$

$$2) (2x^2 - 2x + 5) - (5x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 2x + 5 - 5x^2 - 5x + 3 = -3x^2 - 7x + 8;$$

Щоб **помножити одночлен на многочлен**, треба кожен член многочлена помножити на одночлен і одержані одночлени додати.

Наприклад, $3a(a^2 - 3a + ab) = 3a^3 - 9a^2 + 3a^2b$;

Щоб **помножити многочлен на многочлен**, треба кожен член одного многочлена помножити на кожен член другого многочлена і одержані члени додати.

Наприклад, $(3x - 2) \cdot (2x - 3) = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 = 6x^2 - 13x + 6$.

Щоб **розділити многочлен на одночлен**, треба кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати.

Наприклад,

$$(7x^6 - 2x^5 + 3x^2 + 6x) : 2x = 7x^6 : 2x - 2x^5 : 2x + 3x^2 : 2x + 6x : 2x = 3,5x^5 - x^4 + 1,5x + 3.$$

Розкладанням многочлена на множники називають подання многочлена у вигляді добутку многочленів. Для цього можна використовувати **формули скороченого множення**:

$$1. a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Наприклад, $16a^2 - 9b^2 = (4a - 3b)(4a + 3b)$.

$$2. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Наприклад, $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$.

$$3. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Наприклад, $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$.

$$4. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Наприклад, $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

$$5. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Наприклад, $8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$.

6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Наприклад, $(a+5b)^3 = a^3 + 15a^2b + 75ab^2 + 125b^3$.

7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Наприклад, $(2x-y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$.

Вирази із змінними, які можуть містити операції додавання, віднімання, множення, піднесення змінних до натурального степеня, а також ділення на вирази із змінними називаються **дрово-раціональними виразами**.

Наприклад, $\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3xy}$ – дробово-раціональний вираз.

Означення. **Числовим значенням алгебраїчного виразу** при даних значеннях букв, що входять до нього, називають число, яке отримуємо в результаті підстановки замість букв відповідних їм числових значень та виконання зазначених дій.

ПРИКЛАД 7. Знайдіть числове значення виразу $\frac{a}{2b+5a}$ при $a=1, b=-2,5$.

Розв'язання: $\frac{a}{2b+5a} \Big|_{\substack{a=1 \\ b=-2,5}} = \frac{1}{2(-2,5)+5 \cdot 1} = \frac{1}{0}$. На 0 ділити не можна. Отже, при даних значеннях букв вираз не має змісту.

ПРИКЛАД 8

Довести, що $20^3 - 4^4$ ділиться націло на 121.

$$20^3 - 4^4 = (5 \cdot 4)^3 - 4^4 = 5^3 \cdot 4^3 - 4^4 = 4^3(5^3 - 4) = 4^3 \cdot 121$$

Отже, значення даного виразу ділиться націло на 121.

ПРИКЛАД 9

Спростити вираз: $\left(\frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{x^3-8} - \frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x} \right)$.

Розв'язання: 1) $\frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{x^3-8} - \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{(x-2)(x^2+2x+4)} - \frac{1}{x-2} =$

$$\frac{x^2-2x+x^2+8-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x-2}{x^2+2x+4};$$

2) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{x-2} = \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)};$

3) $\frac{x-2}{x^2+2x+4} \cdot \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ:

№1. У рівності $2(1,5x - 0,5) = 7x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилось рівняння, яке 1) не має коренів; 2) має безліч коренів; 3) має один корінь.

№2. Підприємець поклав у банк 3000 грн., причому по одній частині вкладу йому нараховували 7% річних, а по другій – 8% річних. Через рік він одержав 222 грн. прибутку. Знайдіть, яку суму було внесено на кожний вид вкладу.

№3. Обчислити: а) $\frac{3^{10} \cdot (3^5)^3}{(3^5)^4 \cdot 3}$; б) $\frac{12 \cdot 18^{12} - 6^{15} \cdot 3^{10}}{21 \cdot 9^{11} \cdot 4^6 + 3^{23} \cdot 8^4}$.

№4. Розкласти на множники:

- 1) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
- 2) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
- 3) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
- 4) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.
- 5) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

№5. Розв'язати рівняння: $x^4 - 10x^3 + 250x - 625 = 0$

№6. Довести, що $97^3 + 78^3 + 97^2 - 78^2$ ділиться на 175.

№7. Довести тотожність: $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

№8. Спростити вираз: $A = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$.

№9. Спростити вираз $\left(\frac{8a}{4-a^2} + \frac{2-a}{2+a}\right) : \frac{2+a}{a}$.

№10. Що більше: а) 3^{200} чи 2^{300} ; б) 126^{13} чи 24^{18} ; в) 5^{111} чи 11^{70} ?

№11. Знайдіть значення виразу: $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64}$.

№12. Спростити вираз: $\left(\frac{3x-8}{x^2-2x+4} + \frac{1}{x+2} - \frac{4x-28}{x^3+8}\right) \cdot \frac{x^2-4}{4}$.