

Лекція №2

Тестова самостійна робота

Частина 1. Завдання 1-6 мають по 5 варіантів відповіді, серед яких лише один правильний. Обведіть в таблиці правильну, на вашу думку, відповідь.

1. У Якова і Василя разом 40 яблук, причому у Якова на 10 яблук більше, ніж у Василя. Скільки яблук у Василя?

А	Б	В	Г	Д
10	15	20	25	Інша відповідь

2. Спростити вираз: $\frac{45^{10}}{3^{18} \cdot 5^{11}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{3^{18}}$	Інша відповідь

3. Скільки коренів має рівняння $||x| - 7| = 7$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	чотири	жодного

4. Спростити вираз: $A = (-2x^2y)^3 \cdot (-3xy^5)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-6x^8y^{13}$	$72x^7y^{10}$	$-72x^8y^{13}$	$-72x^7y^{10}$	Інша відповідь

5. Розв'яжіть рівняння: $x^2 - (x+1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$.

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	$x \in \emptyset$	Інша відповідь

6. Знайти невідому цифру числа $\overline{67035x}$, якщо відомо, що дане число ділиться на 12.

А	Б	В	Г	Д
9	6	3	0	Інша відповідь

Частина 2. Кожне завдання цієї частини необхідно розв'язати в чернетці та вписати відповідь поруч з завданням.

7. За перший день Петрик прочитав $\frac{2}{7}$ сторінок книжки, а на другий день – 64% остачі, після чого залишилось прочитати ще 54 сторінки. Скільки сторінок у книжці?

Відповідь: _____

8. При яких значеннях параметра a рівняння $a(a-3)x = a-3$ має розв'язки? Для кожного знайденого a вказати розв'язки.

Відповідь: _____

9. Розв'язати рівняння $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

Відповідь: _____

Тема: Модулі. Дії над многочленами.

Користуємося теоремами:

- I. $|f(x)| = a, a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}; |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; |f(x)| = a, a < 0$ немає розв'язку.
- II. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}.$

Приклад 1. Розв'язати рівняння: а) $|x-2|-3|=1$; б) $|3x-1|=|2x+4|$.

Розв'язання:

$$\text{а) } |x-2|-3|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|-3=1 \\ |x-2|-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|=4 \\ |x-2|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-2=4 \\ x-2=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \\ x=4 \\ x=0 \end{cases}.$$

$$\text{б) } |3x-1|=|2x+4| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=2x+4 \\ 3x-1=-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Виконуючи дії над одночленами та многочленами розв'язуємо задачі:

Приклад 2. Спростити вираз: $x^{n+1}(x^{n+6}-1)-x^{n+2}(x^{n+5}-x^3)$.

Розв'язання: $x^{n+1}(x^{n+6}-1)-x^{n+2}(x^{n+5}-x^3)=x^{2n+7}-x^{n+1}-x^{2n+7}+x^{n+5}=x^{n+5}-x^{n+1}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $12(x^3-2)-7x(x^2-1)=5x^3+2x+6$.

Розв'язання: $12(x^3-2)-7x(x^2-1)=5x^3+2x+6 \Leftrightarrow 12x^3-24-7x^3+7x=5x^3+2x+6 \Leftrightarrow 5x=30 \Leftrightarrow x=6$.

Приклад 4. Доведіть, що вираз $7a^4(a+3)-a^3(21a+7a^2-3a^5)+2$ набуває додатного значення при будь-якому значенні a . Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні a ?

Розв'язання: $7a^4(a+3)-a^3(21a+7a^2-3a^5)+2=7a^5+21a^4-21a^4-7a^5+3a^8+2=3a^8+2$

Вираз $3a^8+2$ додатний і не менший, ніж 2 для довільного значення a . Найменшого значення 2 вираз досягає при $a=0$.

Повторимо алгоритм розв'язування лінійних рівнянь з параметрами:

Рівняння виду $ax=b$, у якому a і b – деякі відомі числа, а x – змінна, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ – єдиний корінь рівняння;

якщо $a = 0$ і $b \neq 0$ – рівняння коренів немає;

якщо $a = 0$ і $b = 0$ – рівняння має безліч коренів.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: а) $(a-1)x = -5a+5$; б) $a(3x-2) = x+4$;
в) $a(a-4)x = 3a$.

Розв'язання: а) $(a-1)x = -5a+5 \Leftrightarrow$ При $a \neq 1$, $x = \frac{-5a+5}{a-1} = \frac{-5(a-1)}{a-1} = -5$;

при $a = 1$, $0x = 0 \Rightarrow$ безліч розв'язків

б) $a(3x-2) = x+4 \Leftrightarrow 3ax - 2a = x+4 \Leftrightarrow (3a-1)x = 2a+4 \Leftrightarrow$

При $a \neq \frac{1}{3}$ $x = \frac{2a+4}{3a-1}$; при $a = \frac{1}{3}$, розв'язків немає.

При $a \neq 0, a \neq 4$, $x = \frac{3}{a-4}$;

в) $a(a-4)x = 3a \Leftrightarrow$ при $a = 0$, безліч розв'язків
при $a = 4$, немає розв'язків

Використовуючи матеріал попередньої лекції по властивостям подільності розв'язуємо задачу:

Приклад 6. При яких цілих значеннях a корінь рівняння $ax = 10$ буде цілим числом?

Розв'язання: При $a \neq 0$ $x = \frac{10}{a}$ – вираз буде цілим, якщо a буде дільником числа 10.

Перерахуємо всі дільники: 1, 2, 5, 10, -1, -2, -5 і -10. Отже: при $a = -1 \Rightarrow x = -10$;

$a = 1 \Rightarrow x = 10$; $a = -2 \Rightarrow x = -5$; $a = 2 \Rightarrow x = 5$; $a = -5 \Rightarrow x = -2$; $a = 5 \Rightarrow x = 2$;

$a = -10 \Rightarrow x = -1$; $a = 10 \Rightarrow x = 1$.

Приклад 7. При яких цілих значеннях b рівняння $(b+4) \cdot x = 49$ матиме натуральні розв'язки?

Розв'язання: При $b+4 \neq 0$ $x = \frac{49}{b+4}$ – вираз буде натуральним числом, якщо

$b+4$ буде додатним дільником числа 49. Перевіримо всі такі дільники: 1, 7 та 49.

При $b+4 = 1$, $x = 49$, при $b+4 = 7$, $x = 7$, при $b+4 = 49$, $x = 1$. Знайшовши

відповідні значення b , записуємо відповідь: При $b = -3$, $x = 49$, при $b = 3$, $x = 7$,
при $b = 45$, $x = 1$.

Приклад 8. Ціну товару спочатку збільшили на 50%, а потім зменшили на 50%.

Збільшилась чи зменшилась початкова ціна товару і на скільки відсотків?

Відповідь: Зменшилось на 25%.

Приклад 9. У двоцифровому числі кількість десятків у 3 рази більша за кількість одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде на 54 меншим від даного. Знайти дане двоцифрове число. Відповідь: 93.

Приклад 10. Поставити замість зірочок цифри так, щоб число $25*78*$ ділилось на 30. Знайти всі такі числа. (P.S: різні * можуть означати різні цифри!)

Відповідь: 252780, 255780, 258780.

Домашня робота №2:

1. Спростити вираз: $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1)$, де n – натуральне число.
2. Доведіть, що вираз $(2x^4 + 4x - 1) - (x^2 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4)$ набуває від'ємного значення при будь-якому значенні x . Якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x ?
3. Замініть зірочки одночленами, щоб виконувалась рівність:
1) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16x^7 y^6 z^8$, 2) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72x^8 y^{11}$.
4. Розв'язати рівняння: 1) $||x + 1| - 4| = 3$; 2) $|2x - 3| = |5x + 6|$.
5. Розв'язати рівняння: $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$.
6. Розв'язати рівняння при кожному значенні параметра a :
1) $a(5x - 7) = x + 3$; 2) $x(x + 3) - x(x + 6) = 3a - 9 - ax$.
7. При яких цілих значеннях a корінь рівняння $(a - 5)x + 6 = 0$ є цілим числом?
8. При яких цілих значеннях a корінь рівняння $x + 7a = 9$ є цілим числом, що ділиться на 2?
9. Периметр прямокутника дорівнює 28 см. Якщо дві протилежні його сторони збільшити на 6 см, а дві інші зменшити на 2 см, то його площа збільшиться на 24 см^2 . Знайти сторони даного прямокутника.
10. Підприємець поклав у банк 3000 грн., причому по одній частині вкладу йому нараховували 7% річних, а по другій – 8% річних. Через рік він одержав 222 грн. прибутку. Знайдіть, яку суму було внесено на кожний вид вкладу.
11. Поставити замість зірочок цифри так, щоб число $32*365717*$ ділилось на 45.
12. Знайти всі двоцифрові числа, які дорівнюють добутку їх цифр, збільшених на одиницю.

Відповіді до тесту:

1. Б; 2. Б; 3. В; 4. В; 5. А; 6. Б; 7. 210 ст.;

При $a \neq 0, a \neq 3, x = \frac{1}{a}$;

8. при $a = 3$, безліч розв'язків; 9. $x=9$.
при $a = 0$, немає розв'язків.

Відповіді та вказівки

- $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1) = -x^{2n+2} + x^{n+4} + x^n$.
- $(2x^4 + 4x - 1) - (x^2 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4) = -x^4 - 1 \leq -1$. Найбільше значення виразу -1 при $x = 0$.
- 1) $(xy^2)^3 \cdot (2xz^2)^4 = 16x^7y^6z^8$, 2) $(-2x^2y)^3 \cdot (3xy^4)^2 = -72x^8y^{11}$.
- 1) $x = 6, x = -8, x = 0, x = -2$; 2) $x = -3, x = -\frac{3}{7}$.
- $x = -5$.
- 1) $a(5x - 7) = x + 3 \Leftrightarrow (5a - 1)x = 7a + 3 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{5}, x = \frac{7a + 3}{5a - 1}; a = \frac{1}{5}, x \in \emptyset$;
2) $x(x + 3) - x(x + 6) = 3a - 9 - ax \Leftrightarrow (a - 3)x = 3a - 9 \Leftrightarrow a \neq 3, x = 3; a = 3$, безліч розв'язків.
- $(a - 5)x + 6 = 0 \Leftrightarrow (a - 5)x = -6 \Leftrightarrow a \neq 5, x = \frac{-6}{a - 5} \Rightarrow a = 11, x = -1; a = 8, x = -2$;
 $a = 7, x = -3; a = 6, x = -6; a = 4, x = 6; a = 3, x = 3; a = 2, x = 2; a = -1, x = 1$.
- $x + 7a = 9 \Leftrightarrow x = -7a + 9 \Rightarrow a$ - будь-яке непарне число: якщо $a = 2m + 1 \Rightarrow x = -7(2m + 1) + 9 = -14m + 2 = 2(-7m + 1)$ ділиться на 2.
- Якщо x - перша пара сторін прямокутника, то маємо з умови рівняння:
 $(x + 6)(14 - x - 2) = x(14 - x) + 24 \Leftrightarrow x = 6$. Сторони прямокутника 6, 8, 6 і 8.
- Якщо на перший рахунок покладено x грн., то з умови
 $0,07 \cdot x + 0,08(3000 - x) = 222 \Rightarrow x = 1800$. На перший рахунок було покладено 1800 грн., а на другий - 1200 грн.
- Число $32*365717*$ ділиться на 45, якщо воно ділиться на 9 і на 5, відповідно сума його цифр має ділитися на 9, а остання цифра має ділитися на 5. Шуканих чисел два: 3223657170 та 3263657175.
- Якщо a і b цифри шуканого двоцифрового числа \overline{ab} , то з умови:
 $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)(b + 1) \Rightarrow a(9 - b) = 1 \Rightarrow a = 1, b = 8$. Шукане число 18.