Лекція 2
Лінійні рівняння та системи, в тому числі з модулем

1. Лінійні рівняння

Означення: Лінійним рівнянням з однією змінною називається рівняння вигляду

$$ax + b = 0, \qquad (1)$$

де a, b – фіксовані дійсні числа, які називають коефіцієнтами рівняння. Тут a – коефіцієнт перед x або старший член, b – вільний член.

Означення: Розв'язком (коренем) лінійного рівняння з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює рівняння на правильну рівність.

Наприклад, число $x_0 = 1$ є розв'язком рівняння $2x - 2 = 0$, оскільки рівність $2 \cdot 1 - 2 = 0$ виконується, а число $x_0 = 2$ не є розв'язком цього рівняння, оскільки рівність $2 \cdot 2 - 2 = 0$ не є правильною.

Означення: Рівняння називаються еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають, або якщо обидва рівняння не мають розв'язків.

Лінійні рівняння вигляду (1) розв'язують, залежно від значень чисел a, b, за **схемою**:

i) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{-b}{a}$;

ii) якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має розв'язків;

iii) якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – довільне дійсне число.

Наприклад, рівняння $0 \cdot x + 3 = 0$ не має розв'язку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 23$.

Зведемо рівняння до вигляду (1), помноживши на спільний знаменник дробів із лівої частини: $4\cdot 2x+3\cdot 5x=23\cdot 12$, тобто $23x=23\cdot 12$. Тоді, оскільки обидві частини рівняння можна поділити на *23*, розв'язок рівняння $x=12$.

2. Системи лінійних рівнянь

Часто виникає потреба розв'язувати системи та сукупності двох (або кількох) лінійних рівнянь з однією змінною, а також різноманітні їх комбінації.

Означення: Системою двох лінійних рівнянь з однією змінною називається система вигляду

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0. \end{cases}$$

Означення: Сукупність двох лінійних рівнянь з однією змінною називається сукупність вигляду

$$\left[\begin{array}{l} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0. \end{array}\right.$$

Аналогічно визначаються система та сукупність трьох і більше лінійних рівнянь з однією змінною.

Означення: Розв'язком (коренем) *системи* двох (кількох) лінійних рівнянь з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює ***кожне*** рівняння системи на правильну рівність.

Так , x_0 буде розв'язком системи $\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{cases}$ якщо $a_1x_0+b_1=0$ **і** $a_2x_0+b_2=0$.

Означення: Розв'язком (коренем) *сукупності* двох (кількох) лінійних рівнянь з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює ***хоча б з*** рівнянь сукупності на правильну рівність.

Так x_0 буде розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{array}\right.$ якщо $a_1x_0+b_1=0$ **або** $a_2x_0+b_2=0$.

Наприклад,

- система $\begin{cases} x=2, \\ x=3 \end{cases}$ не має розв'язку,
- розв'язками сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3 \end{array}\right.$ є $x=2,$ або $x=3$;
- система $\begin{cases} x=2, \\ x=3, \\ x-3=0 \end{cases}$ не має розв'язку,
- розв'язками сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3, \\ x-3=0 \end{array}\right.$ є $x=2,$ або $x=3$;
- розв'язком системи $\begin{cases} x=2, \\ x-2=0 \end{cases}$ є $x=2,$
- розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x-2=0 \end{array}\right.$ є теж $x=2$.

Означення: Системи (сукупності) рівнянь називаються еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають, або якщо обидві системи (сукупності) не мають розв'язків.

Зауваження: Відзначимо, що система рівняння і сукупності двох рівнянь $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{array}\right. \\ a_3x+b_3=0, \end{cases}$ еквівалентна сукупності двох систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_3x+b_3=0, \end{cases} \\ \begin{cases} a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0. \end{cases} \end{array}\right.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(2x+1)(x-3)=0$.

Добуток двох чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоч один з множників дорівнює нулю, тому дане рівняння еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} 2x+1=0, \\ x-3=0, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x=-\frac{1}{2},$ або $x=3$.

Приклад 3. При якому значенні параметра a вказані рівняння не має розв'язку: а) $(3-a)x=5$; б) $(3-a)x=a+1$?

Внаслідок пункту ii) схеми розв'язання лінійного рівняння, умова задачі буде виконуватись, якщо коефіцієнт перед x рівний нулю і водночас вільний член не дорівнює нулю. У прикладах а) та б) ця умова має наступний вигляд:

а) $\begin{cases} 3-a=0, \\ 5\neq 0, \end{cases}$ тобто при $a=3$ рівняння не має розв'язку.

б) $\begin{cases} 3-a=0, \\ a+1\neq 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} a=3, \\ a\neq -1, \end{cases}$ тобто при $a=3$ рівняння не має розв'язку.

<u>Приклад</u> 4. При якому значенні параметра a рівняння $(a+3)x=a+1$ має єдиний розв'язок?

Внаслідок пункту і) схеми розв'язання лінійного рівняння, умова задачі буде виконуватись, якщо коефіцієнт перед x не рівний нулю, тобто при $a+3\neq 0$. Отже, при всіх дійсних a крім $a=-3$ рівняння має єдиний розв'язок. Зауважимо, що цей розв'язок має вигляд $x=\dfrac{a+1}{a+3}$, $a\neq -3$.

<u>Приклад</u> 5. При якому значенні параметра a рівняння $a(a+2)x=a+2$ має безліч розв'язків?

Внаслідок пункту ііі) схеми розв'язання лінійного рівняння, умова задачі буде виконуватись, якщо коефіцієнт перед x і вільний член водночас дорівнють нулю, тобто при $\begin{cases} a(a+2)=0, \\ a+2=0. \end{cases}$ Оскільки добуток дорівнює нулю тоді і тількі тоді, коли хоч один з множників дорівнює нулю, остання система є еквівалентною системі $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a+2=0, \end{array}\right. \\ a+2=0, \end{cases}$ звідки $a=-2$. Отже, при $a=-2$ рівняння має безліч розв'язків.

<u>Означення</u>: <u>Системою двох лінійних рівнянь з двома змінними</u> називається система вигляду

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \qquad (2)$$

де $a_1,\ a_2, b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ – фіксовані дійсні числа, які називають <u>коефіцієнтами системи.</u>

<u>Означення</u>: <u>Розв'язком (коренем) системи лінійних рівнянь з двома змінними</u> називається така пара дійсних чисел $(x_0;y_0)$, яка перетворює кожне рівняння системи на правильну рівність, тобто така пара $(x_0;y_0)$, що

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0, \end{cases}.$$

Означення: Системи рівнянь з двома змінними називаються еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають, або якщо обидві системи не мають розв'язків.

Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними вигляду (2), можна розв'язати *методом підстановки*. Цей метод полягає в тому, що з одного з рівнянь виражають одну з невідомих змінних і підставляють в інше рівняння. Тоді це рівняння стає лінійним рівнянням з однією змінною, яке легко розв'язати. Знайшовши розв'язок другого рівняння підставляємо його у перше, і знаходимо другу змінну.
Даний метод базується на твердженні, що системи

$$\begin{cases} x = my + n, \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = my + n, \\ a(my+n) + by + c = 0 \end{cases}$$

еквівалентні.
Проілюструємо метод підстановки на прикладі.

Приклад 6. Розв'язати систему $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 0. \end{cases}$

З першого рівняння виражаємо x і підставляємо в друге: $\begin{cases} x = 1 + 2y, \\ 3(1+2y) + 2y = 0. \end{cases}$

Тепер друге рівняння є рівнянням відносно y. Розв'яжемо його.
Рівняння $3(1+2y)+2y=0$ еквівалентне рівнянню $8y+3=0$, розв'язок якого $y = \frac{-3}{8}$. Отже, система еквівалентна системі $\begin{cases} x = 1+2y, \\ y = -\frac{3}{8}, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x = 1 - 2\cdot\frac{3}{8}, \\ y = -\frac{3}{8}. \end{cases}$

Розв'язок системи – пара $\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{8}\right)$.

Метод підстановки є універсальним способом розв'язання систем лінійних рівнянь з двома змінними, що завжди дає можливість розв'язати систему, але часто вимагає досить складних арифметичних обчислень. Інколи зручнішим для розв'язання систем є *метод перетворення*. Він полягає у тому, що будь-яке рівняння системи можна замінити на суму чи різницю відповідних частин рівнянь вихідної системи або рівнянь вихідної системи, домножених на деяку, відмінну від нуля, сталу. Метод спирається на твердження, що система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

еквівалентна будь-якій із наступних систем:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0, \\ (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)=0, \end{cases}$$

Проілюструємо на прикладі метод перетворення.

Приклад 7. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$

Не складно помітити, що якщо перше рівняння системи домножити на 3, а друге на 2, після чого відняти від першого друге, вийде рівняння, що не містить змінної x. Дійсно, $3(2x+3y)-2(3x-2y)=3\cdot1-2\cdot2 \quad \Leftrightarrow 13y=-1.$ Аналогічно, що якщо перше рівняння системи домножити на 2, а друге на 3, після чого додати рівняння, вийде рівняння, що не містить змінної y. Дійсно, $2(2x+3y)+3(3x-2y)=2\cdot1+3\cdot2 \quad \Leftrightarrow 13x=8.$ Отже, вихідна система еквівалентна системі $\begin{cases} 13y=-1, \\ 13x=8, \end{cases}$ розв'язок якої $\left(\frac{8}{13};-\frac{1}{13}\right)$.

Звичайно, задачу можна було розв'язати і методом підстановки:

$$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4+4y}{3}+3y=1, \\ x=\frac{2+2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4y+9y=3, \\ x=\frac{2+2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1}{13}, \\ x=\frac{2-\frac{2}{13}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1}{13}, \\ x=\frac{8}{13}. \end{cases}$$

3. Модуль

Означення: Модуль (абсолютна величина) числа a – це саме число a, при $a \ge 0$, та протилежне до нього -a, при $a<0$, тобто

$$|a|=\begin{cases} a, a\ge 0, \\ -a, a<0. \end{cases}$$

Приклад 1. Розкрити модуль:

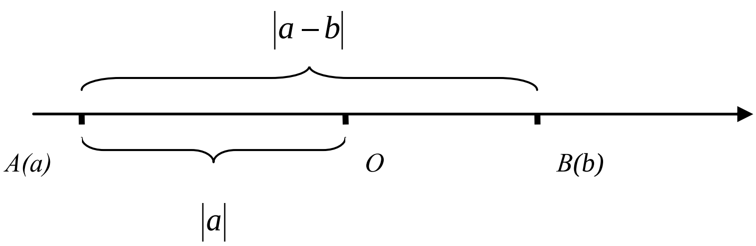
а) $|3|=3$;

б) $|-5| = -(-5) = 5$ (оскільки під модулем міститься від’ємне число, міняємо знак на протилежний);

в) $\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1$ ($\sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$, тому $1-\sqrt{2} < 0$, отже, знак міняємо на протилежний);

г) $\left|-x^2-2\right| = x^2+2$ (для довільного x справедливо, що $x^2 \ge 0$, тоді $-x^2-2 < -x^2 \le 0$, отже, знак міняємо на протилежний).

<u>**Геометрична інтерпретація**</u>: Нехай задано координати на числовій прямій, початок координат – точка $O(0)$, точки $A(a)$ та $B(b)$ мають координати a та b відповідно. Тоді $|a|$ – це відстань від точки A до початку координат, $|a-b|$ – відстань між точками $A(a)$ та $B(b)$.



<u>**Властивості**:</u> Для довільних дійсних чисел a та b справедливі твердження.

1. $|a| \ge 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$.
3. $|a| = |-a|$.
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
5. для $b \ne 0$: $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
6. $|a|^2 = a^2$.
7. $|a+b| \le |a|+|b|$ (<u>нерівність трикутника</u>), причому *рівність досягається* тоді і тільки тоді, коли *числа* a *та* b *одного знаку*.

Зауваження: Якщо числа a та b різних знаків, то *нерівність трикутника є строгою*.

Лінійні рівняння з модулем.

Нехай a – деяке задане дійсне число, $f(x), g(x)$ – функції від x. З означення модуля є справедливими наступні схеми розв'язання рівнянь із модулями.

1. Рівняння

$$|f(x)| = a \qquad (3)$$

при $a < 0$ не має розв'язку, при $a \geq 0$ еквівалентне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

Очевидно, що при $a = 0$ остання сукупність еквівалентна рівнянню $f(x) = 0$.

<u>Приклад</u> 2. Розв`язати рівняння: а) $|x| = -7$; б) $|x| = 5$; в) $|x - 3| = 4$;

г) $|2 - x| = 1$; д) $|2x + 1| = 5$; е) $7 - |x + 3| = 1$; є) $||x| - 2| = 1$.

Дані рівняння є рівняннями вигляду (3). Розв'яжемо їх запропонованим вище методом.

а) рівняння $|x| = -7$ не має розв'язку, оскільки -7<0, а модуль x за означенням число додатнє.

б) рівняння $|x| = 5$ має розв'язки $x = 5$ або $x = -5$.

в) рівняння $|x - 3| = 4$ еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} x - 3 = 4, \\ x - 3 = -4, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x = 7$ або $x = -1$.

г) рівняння $|2 - x| = 1$ еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} 2 - x = 1, \\ 2 - x = -1, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x = 1$ або $x = 3$.

д) рівняння $|2x + 1| = 5$ еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 5, \\ 2x + 1 = -5, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x = 2$ або $x = -3$.

е) рівняння $7-|x+3|=1$ спочатку зводимо до еквівалентного рівняння вигляду (3): $|x+3|=6$. Останнє рівняння, в свою чергу, еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} x+3=6, \\ x+3=-6, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x=3$ або $x=-9$.

є) рівняння $||x|-2|=1$ розв'яжемо, знімаючи модулі по черзі. Воно еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} |x|-2=1, \\ |x|-2=-1, \end{array}\right.$ тобто сукупності двох рівнянь з модулями $\left[\begin{array}{l} |x|=3, \\ |x|=1, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x=\pm 1$ або $x=\pm 3$.

2. Рівняння

$$|f(x)|=g(x) \tag{4}$$

еквівалентне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x), \end{array}\right. \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

<u>**Приклад:**</u> 3. Розв`язати рівняння $|x+3|=4-2x$.

Дане рівняння є рівняннями вигляду (4). Розв'яжемо його. Рівняння $|x+3|=4-2x$ еквівалентне системі $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+3=4-2x, \\ x+3=2x-4, \end{array}\right. \\ 4-2x\geq 0. \end{cases}$ Розв'язуючи сукупність у системі одержимо $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}, \\ x=7, \end{array}\right. \\ 4-2x\geq 0. \end{cases}$ Кожне зі значень $x=\frac{1}{3}$ та $x=7$ може бути розв'язком рівняння, якщо задовольнятиме умову $4-2x\geq 0$. Перевіримо її. Для $x=\frac{1}{3}$ виконується $4-2\cdot\frac{1}{3}=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\geq 0$, для $x=7$ виконується $4-2\cdot 7=4-14=-10<0$. Таким чином, $x=7$ – сторонній корінь; рівняння має єдиний розв'язок $x=\frac{1}{3}$.

Домашня самостійна робота № 2

1. Розв'язати рівняння: 1) $2x+\frac{1-3x}{4}=5$; 2) $x(3-x)(5x+10)=0$.

2. При якому значенні параметра a рівняння 1) $(a-1)x=a$; 2) $(2+a)ax+a+2=0$ не мають розв'язку?

3. При якому значенні параметра a рівняння 1) $(8+2a)x+5=0$; 2) $(3a+1)x=a-1$ мають єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

4. При якому значенні параметра a рівняння 1) $(a-1)x=a+3$; 2) $3a(a-2)x=2-a$ мають безліч розв'язків?

5. Розв'язати рівняння: 1) $(a+4)x+6=0$; 2) $ax+a(a-5)=0$ залежно від значення параметра a.

6. Розв'язати систему: 1) $\begin{cases}x+2y=5,\\ x-2y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+6y=10,\\ 3x-y=2.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-2y=5\\ 4y-2x=3\end{cases}$.

7. Розкрити модуль: 1) $|\pi-4|$; 2) $|\sqrt{6}-2|$; 3) $|x^2+1|$; 4) $|-(x-2)^2-5|$.

8. Розв'язати рівняння: 1) $|x+2|=-5$; 2) $|1-x|=10$; 3) $|3x+1|=8$; 4) $||x|+3|=2$; 5) $|x+2|=2x+7$.

Відповіді та вказівки

1. 1) $x=\frac{19}{5}$; 2) $x=0$, $x=3$, або $x=-2$.

2. 1) $a=1$; 2) $a=0$.

3. 1) $x=\frac{-5}{2a+8}$ при $a\neq-4$; 2) $x=\frac{a-1}{3a+1}$ при $a\neq-\frac{1}{3}$.

4. 1) такого a не існує; 2) $a=2$.

5. 1) при $a\neq-4$, $x=-\frac{6}{a+4}$; при $a=-4$ рівняння не має розв'язку;
   2) при $a\neq 0$, $x=5-a$; при $a=0$ рівняння має безліч розв'язків.

6. 1) $\left(\frac{7}{2},\frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{11}{10},\frac{13}{10}\right)$; 3) Система не має розв'язку.

7. 1) $4-\pi$; 2) $\sqrt{6}-2$; 3) x^2+1; 4) $(x-2)^2+5$.

8. 1) не має розв'язку; 2) $x=11$ або $x=-9$; 3) $x=\frac{7}{3}$ або $x=-3$; 4) не має розв'язку; 5) $x=-3$.