Лекція 4
КОЛО, ТРИКУТНИКИ ТА ЧОТИРИКУТНИКИ В ЗАДАЧАХ
ЦЕНТРАЛЬНІ І ВПИСАНІ КУТИ

Центральним кутом у колі називають кут з вершиною у центрі цього кола.

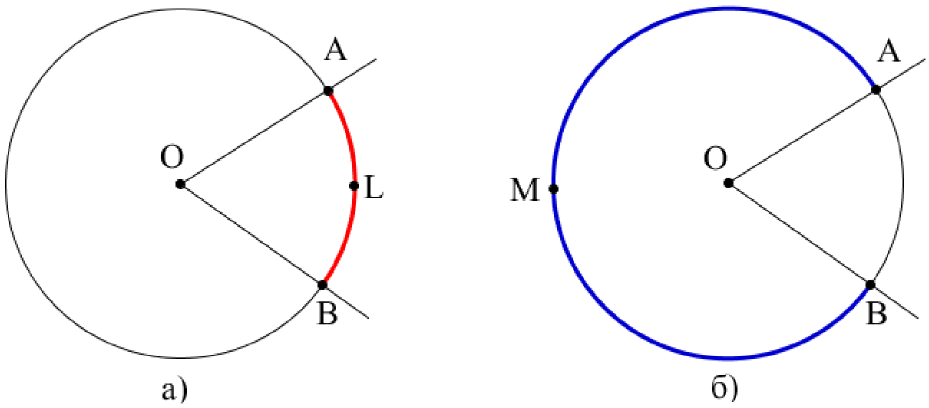


Рис. 1

Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A та B – дуга, менша за півколо (рис.1а), і дуга, більша за півколо (рис.1б). Якщо кут AOB – розгорнутий, то йому також відповідають дві дуги – два півкола.

Щоб розрізняти ці дуги, на кожній з них позначають проміжну точку, наприклад, L (рис.1а) і M (рис.1б). Позначають дуги так: $\cup ALB$ і $\cup AMB$.

Градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.

Кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають його, називається вписаним кутом.

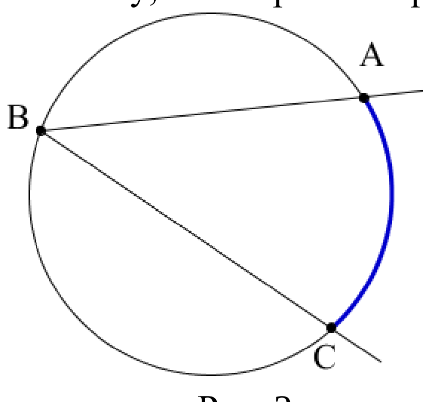


Рис. 2

Наприклад, $\angle ABC$ (рис. 2) – вписаний. Він спирається на дугу AC.

Властивості вписаних кутів.

1. Вписаний кут може містити центр кола на своїй стороні (рис. 3а), між своїми сторонами (рис. 3б) або не містити центр кола (рис. 3в).

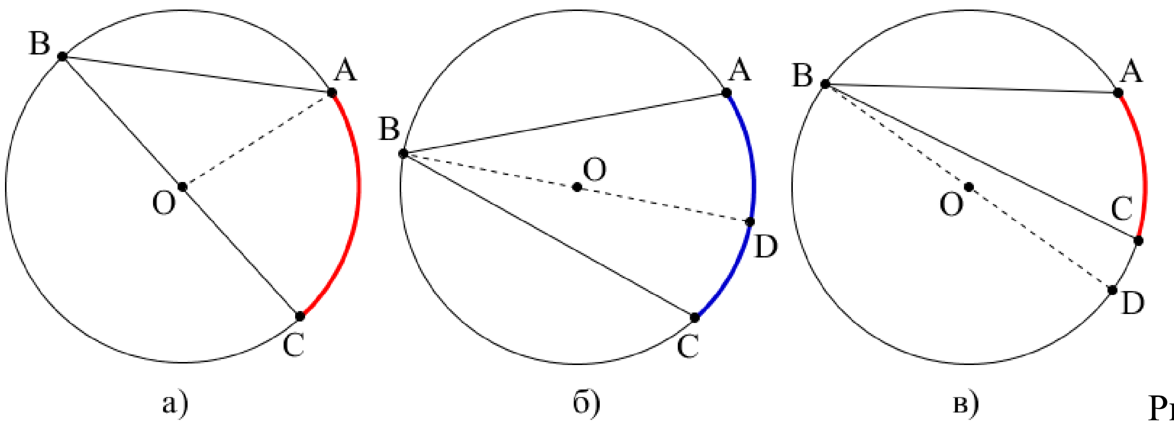


Рис. 3

2. Вписаний кут вимірюється половиною кутової міри дуги, на яку він спирається.
3. Вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу, рівні (рис. 4).

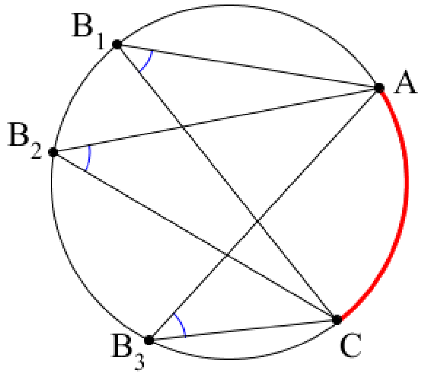


Рис. 4

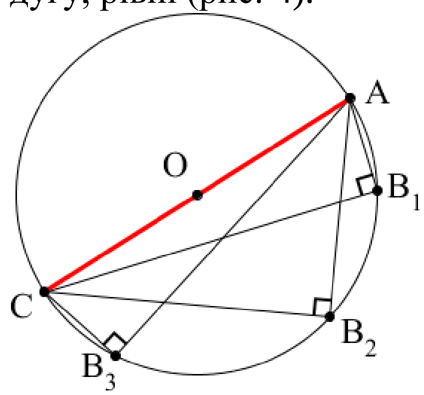


Рис. 5

4. Вписаний кут, що спирається на півколо, – прямий (рис. 5).

ЗАДАЧІ

№ 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша – між продовженнями сторін.

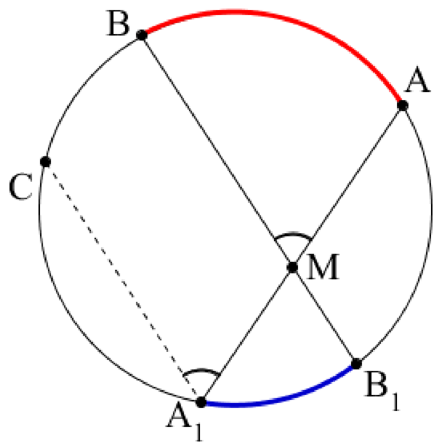


Рис. 6

Розв’язання

∇ Нехай $\cup AB = \alpha$, а $\cup A_1B_1 = \beta$ (рис. 6). Побудуємо $A_1C \parallel BB_1$. Тоді $\cup BC = \cup A_1B_1 = \beta$ і $\angle AMB = \angle AA_1C$. Але, за означенням, $\angle AA_1C$ – вписаний, тому

$$\angle AA_1C = \frac{\cup ABC}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Отже,

$$\angle AMB = \frac{\alpha + \beta}{2}. \blacksquare$$

№ 2. Довести, що кут, утворений дотичною і хордою, які мають спільну точку на колі, вимірюються половиною дуги, що лежить всередині цього кута.

Розв'язання

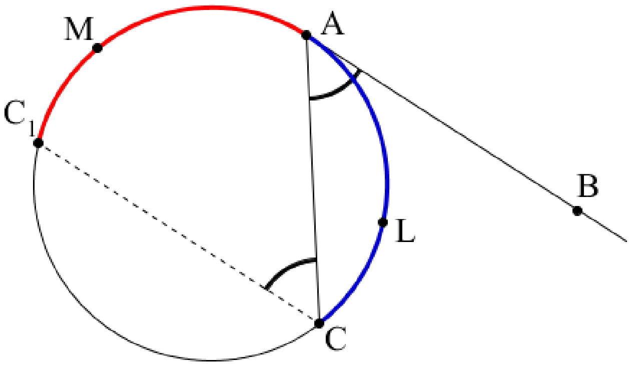


Рис. 7

∇ Нехай AB – дотична (рис. 7), AC – хорда і $\cup ALC = \alpha$.

Проведемо $CC_1 \parallel AB$.

Тоді $\cup AMC_1 = \cup ALC$ і $\angle BAC = \angle ACC_1$. Але $\angle ACC_1$ – вписаний, тому його величина $\alpha/2$, а, значить, $\angle BAC = \alpha/2$. ■

№ 3. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

Розв'язання

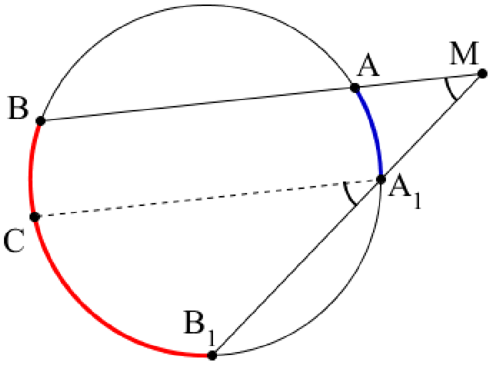


Рис. 8

∇ Нехай MB і MB_1 – січні, $\cup AA_1 = \beta$, а $\cup BB_1 = \alpha$. Побудуємо $A_1C \parallel AB$ (рис. 8). Тоді

$$\cup BC = \cup AA_1 = \beta,$$

$$\angle BMB_1 = \angle CA_1B_1.$$

Але, оскільки $\angle CA_1B_1$ – вписаний, то

$$\angle CA_1B_1 = \frac{\cup B_1C}{2} = \frac{\cup BB_1 - \cup BC}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Отже,

$$\angle BMB_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}. ■$$

№ 4. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

Розв'язання

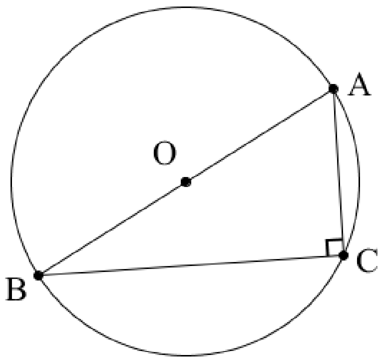


Рис. 9

∇ Нехай коло описане навколо прямокутного ΔABC ($\angle C = 90°$).

Так, як $\angle ACB$ – вписаний і дорівнює $90°$, то він спирається на півколо (рис. 9). Отже AB – діаметр описаного кола, а його центр O – середина AB. ■

№5. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання

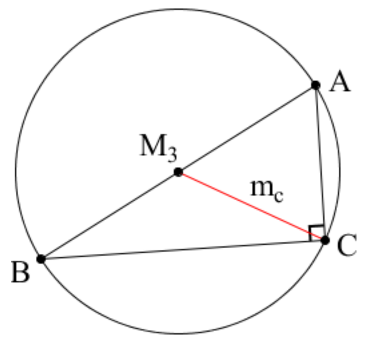


Рис. 10

∇ Нехай ABC – прямокутний трикутник $(\angle C = 90°)$, $AB = c$ і $CM_3 = m_c$ – медіана (рис. 10).

Опишемо навколо ΔABC коло. Тоді AB – його діаметр, а $m_c = AM_3 = M_3B = c/2$.

Отже, $m_c = c/2$. ■

№ 6. Дано кут AOB. Із точки O як із центра проведено коло радіусом $OA = OB = R$. Пряма BC перетинає пряму AO в точці D так, що $CD = R$ (рис. 12). Довести, що $\angle AOB = 3\angle ADB$.

Розв'язання

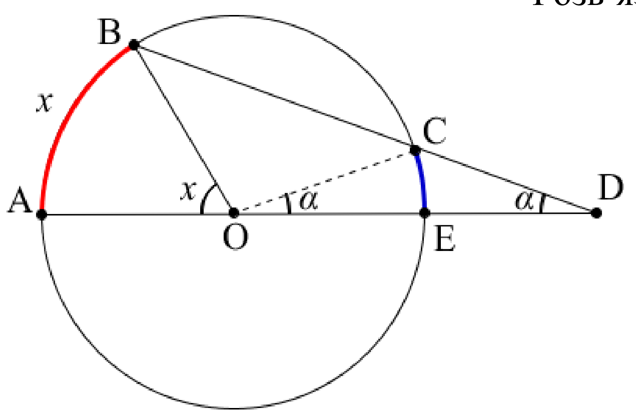


Рис. 11

∇ Проведемо OC.

Нехай $\angle ADB = \alpha$, $\angle AOB = x$. Тоді $\cup AB = x$, а також $OC = CD$, $\angle COE = \alpha$ і $\cup CE = \alpha$. Далі маємо (див. задачу №3):

$$\alpha = \frac{x - \alpha}{2}$$

звідки $x = 3\alpha$. ■

№ 7. Дано коло, центр якого невідомий. Побудовою знайдіть центр цього кола.

Розв'язання

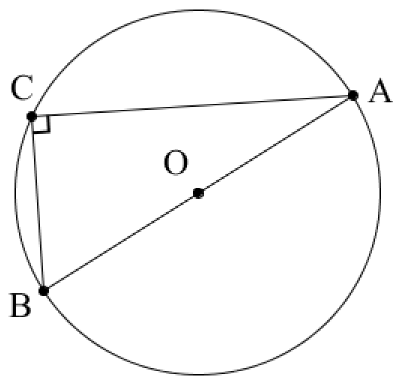


Рис. 12

∇ Оберемо на даному колі довільну точку A.

Проведемо довільну хорду AC (рис. 13), а потім перпендикулярно до неї – хорду BC. Тоді очевидно, що AB – діаметр.

Поділивши за допомогою циркуля і лінійки відрізок AB навпіл, знайдемо центр даного кола. ■

№ 8. У ΔABC BH_2 і CH_3 – висоти, M_1 – середина BC і $BC = a$. Чому дорівнює сума відстаней від точок H_2 і H_3 до точки M_1?

Розв'язання

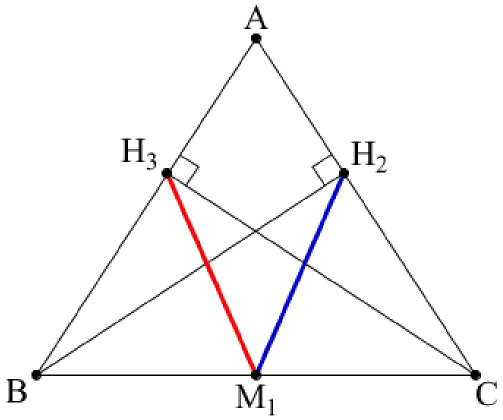


Рис. 13

∇ Нехай BH_2 і CH_3 – висоти ΔABC, M_1 – середина BC і $BC = a$ (рис. 14).

Очевидно, що BC – гіпотенуза трикутників BH_2C та BH_3C. Тому $H_2M_1 = {}^{a}/_{2}$ і $H_3M_1 = {}^{a}/_{2}$.

Таким чином,

$$H_2M_1 + H_3M_1 = a. \blacksquare$$

№ 9. Висота і медіана, проведені з вершини A трикутника ABC, утворюють рівні кути із сторонами AB і AC (рис. 15). Знайти радіус кола, описаного навколо ΔABC, якщо $AM_1 = m$.

Розв'язання

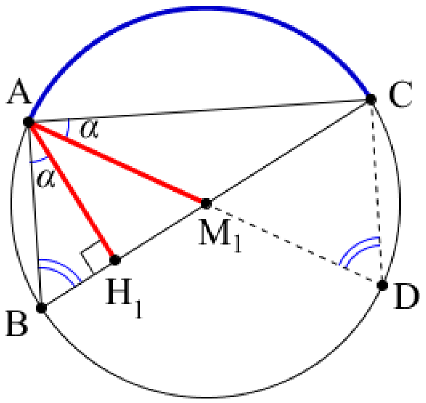


Рис. 14

∇ Нехай AM_1 – медіана, AH_1 – висота і α – величина рівних кутів.

Тоді $\angle ABH_1 = 90° - \alpha$.

Продовжимо медіану AM_1 до перетину з описаним колом в точці D.

Тоді $\angle ADC = \angle ABC = 90° - \alpha$, а $\angle ACD = 90°$. Отже, AD – діаметр.

Так, як AD ділить хорду BC навпіл, причому AD та BC не перпендикулярні, то BC – також діаметр. Тому M_1 – центр описаного кола, тобто $R = m$. ■

№ 10. В прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, в 4 рази менша за гіпотенузу. Які величини гострих кутів цього трикутника?

Розв'язання

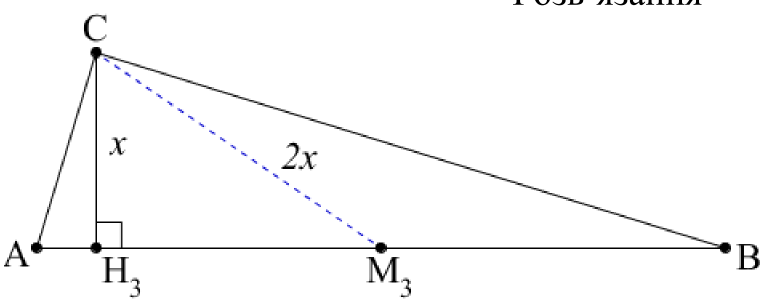


Рис. 15

∇ Нехай в ΔABC ($\angle C = 90°$) до гіпотенузи $AB = 4x$ проведено висоту CH_3 (рис. 16). Тоді її довжина, за умовою, становить $CH_3 = x$.

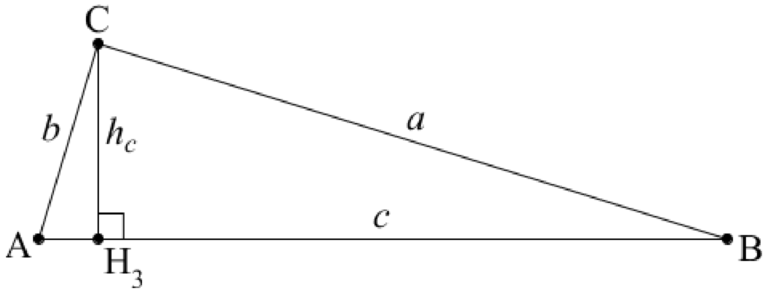
Проведемо медіану CM_3. Так, як CM_3 виходить з вершини прямого кута, то $CM_3 = AB/2 = 2x$.

У трикутнику CH_3M_3 катет CH_3 в два рази менший за гіпотенузу. Тому $\angle CM_3H_3 = 30°$.

Тоді в рівнобедреному трикутнику BM_3C, де $BM_3 = M_3C$, $\angle BM_3C = 150°$. Отже, $\angle B = 15°$, а $\angle A = 75°$.■

№ 11. Добуток висот прямокутного трикутника в 4 рази менший за добуток його сторін. Знайти величини його гострих кутів.

Розв'язання



∇ Нехай в ΔABC $(\angle C = 90°)$ h_c, a, b – його висоти; a, b, c – довжини сторін (рис. 17).

Тоді, за умовою, $4abh_c = abc$.

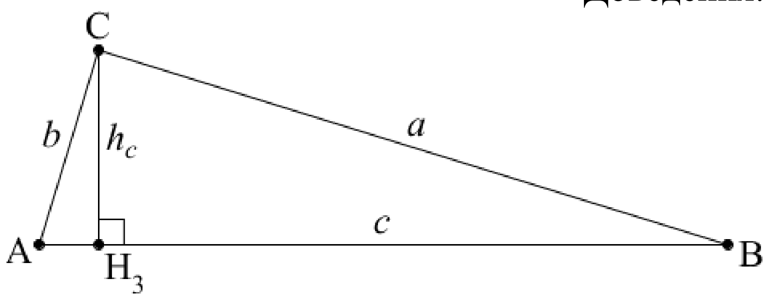
Рис. 16

Таким чином, $h_c = c/4$.

З цього випливає, що $\angle B = 15°$, а $\angle A = 75°$ (див. задачу №10).■

№ 12. В прямокутному трикутнику квадрат висоти, проведеної до гіпотенузи дорівнює добутку відрізків, на які основа висоти поділила гіпотенузу. Довести.

Доведення:



Очевидно, що ΔACH_3 та ΔCH_3B подібні за трьома кутами. Тому $\frac{CH_3}{AH_3} = \frac{BH_3}{CH_3}$ і відповідно $CH_3^2 = AH_3 \cdot H_3B$ що і треба було довести.

ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ТРИКУТНИКИ І ЧОТИРИКУТНИКИ

Відомо, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло і притому тільки одне. Центр цього кола лежить на <u>перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника.</u> Ми вже знаємо, що центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника – це середина гіпотенузи. Якщо ж трикутник гострокутний, то центр описаного кола лежить всередині трикутника, і зовні коли трикутник тупокутний.

У будь-який трикутник можна <u>вписати</u> коло й притому тільки одне; центр цього кола – <u>точка перетину бісектрис кутів трикутника</u>.

Центр вписаного кола завжди лежить усередині трикутника.

Коло, дотичне до однієї із сторін трикутника і до продовження двох інших називається <u>зовнівписаним</u> (рис. 20).

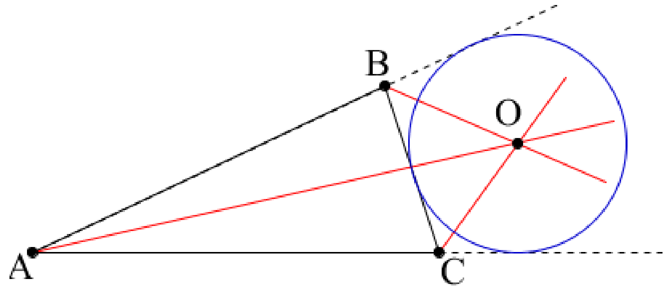


Рис. 17

Центр зовнівписаного кола, що дотикається, наприклад, до сторони BC трикутника ABC, лежить у точці перетину бісектрис зовнішніх кутів при вершинах B і C або в точці перетину однієї з цих бісектрис і бісектриси внутрішнього кута A (рис. 20). Очевидно, що для будь-якого трикутника можна побудувати три зовнівписаним кола.

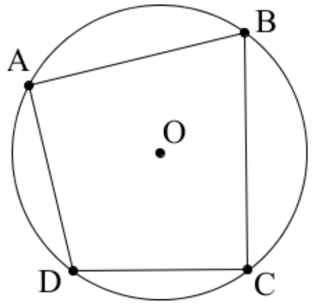


Рис. 18

Нехай тепер маємо довільний чотирикутник. Чи завжди навколо нього можна описати коло? Виявляється, що це можна зробити не завжди.

Нехай у коло з центром O вписано чотирикутник $ABCD$ (рис. 21). Тоді $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$ і

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Отже, на суму двох інших кутів B і D залишається також 180°.

Таким чином, сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

1. Навколо будь-якого прямокутника завжди можна описати коло.
2. Навколо рівнобічної трапеції завжди можна описати коло.

Для обох цих випадків доведення проведіть самостійно.

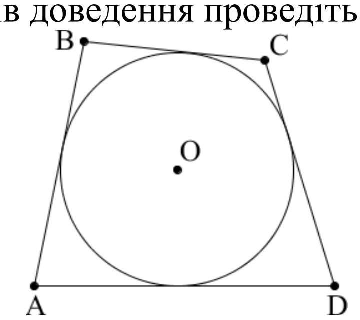


Рис. 19

Користуючись властивостями дотичних, проведених з однієї точки до кола, легко довести, що в описаному чотирикутнику $ABCD$ (рис. 22)
$AB + CD = AD + BC.$

Отже, якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

Серед паралелограмів лише у ромб завжди можна вписати коло.

ТИПОВІ ДОДАТКОВІ ПОБУДОВИ ДЛЯ ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ

На рис.18 та рис.19 штрихованими лініями зображено типові додаткові побудови в трапеціях та трикутниках відповідно.

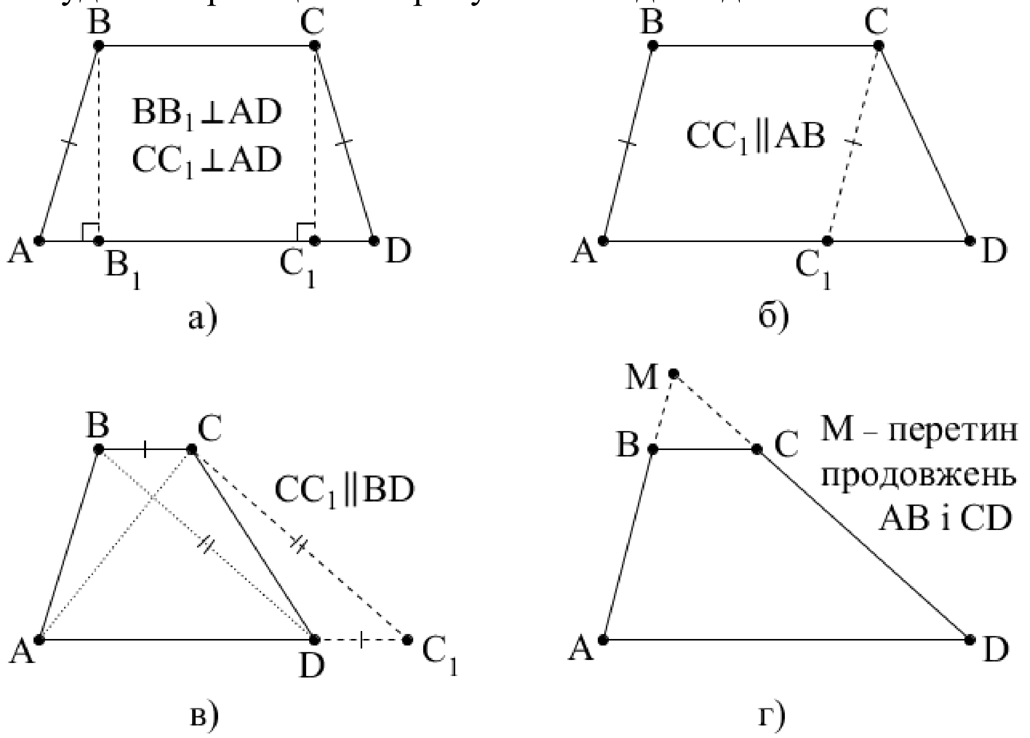


Рис. 20

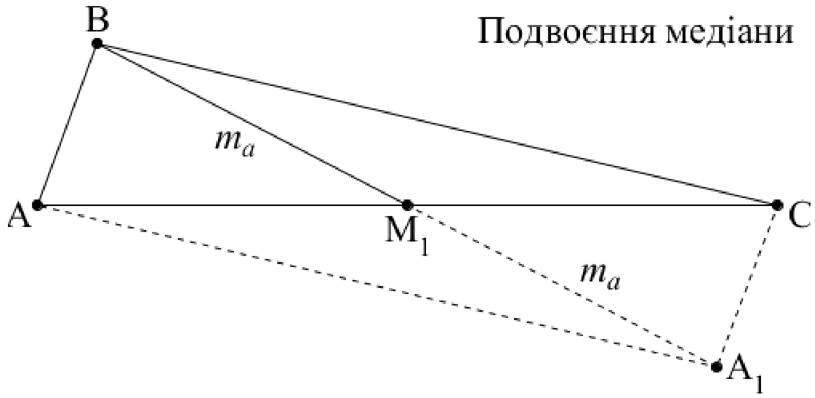


Рис. 21

ВИЗНАЧНІ ТОЧКИ І ЛІНІЇ ТРИКУТНИКІВ

Визначними точками трикутника прийнято вважати наступні точки:

O – центр кола, описаного навколо трикутника – це точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника;

I – інцентр, центр кола, вписаного в трикутник – це точка, перетину бісектрис кутів трикутника;

H – ортоцентр, точка перетину висот трикутника;

M – центроїд, центр ваги – це точка перетину медіан трикутника

Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини трикутника (рис. 23).

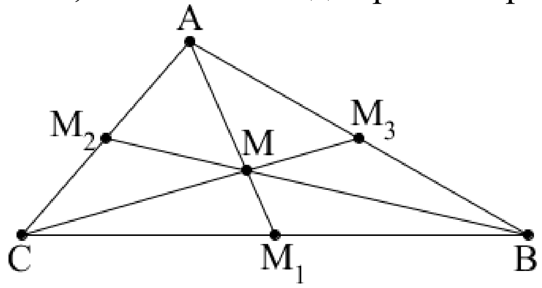


Рис. 22

Отже, $AM : MM_1 = BM : MM_2 = CM : MM_3 = 2 : 1$ (пропонуємо цей факт довести самостійно).

У будь-якому трикутнику ABC центр O описаного кола, центроїд M і ортоцентр H лежать на одній прямій (пряма Ейлера), причому $2OM = MH$.

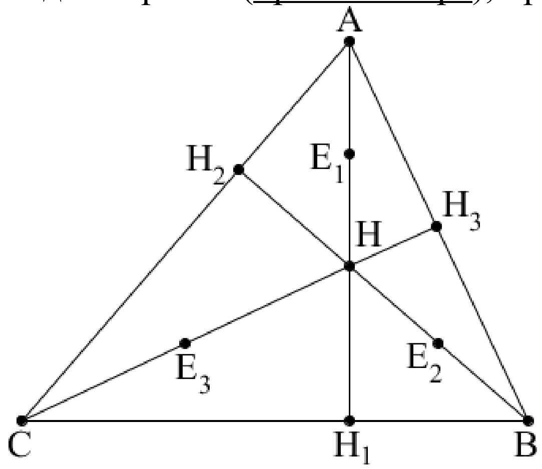


Рис. 23

Точками Ейлера називаються точки E_1, E_2, E_3, які поділяють відрізки AH, BH та CH навпіл (рис. 24).

Можна довести (доведіть самостійно), що середини сторін трикутника, основи його висот і точки Ейлера лежать на одному колі. Це коло знайшов у XVIII ст. великий учений Л. Ейлер і називається воно колом Ейлера або за числом точок — колом дев’яти точок.

Коло дев’яти точок можна побудувати, якщо знати такі дві його властивості:

1. Центр кола є серединою відрізка, який сполучає центр описаного навколо трикутника кола з ортоцентром трикутника.

2. Радіус кола дев’яти точок дорівнює половині радіуса описаного навколо трикутника кола.

ЗАДАЧІ

№ 13. З довільної точки M катета BC прямокутного ΔABC опущено перпендикуляр MD на гіпотенузу AB (рис. 25). Довести, що $\angle MAD = \angle MCD$.

Розв’язання

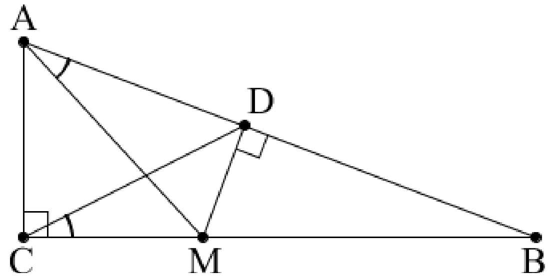


Рис. 24

∇ Так як $\angle ACM + \angle ADM = 180°$, то навколо чотирикутника $ADMC$ можна описати коло. Тоді $\angle MAD = \angle MCD$ як вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу MD.■

№ 14. Довести, що медіана трикутника менша півсуми двох сторін, між якими вона міститься.

Розв'язання

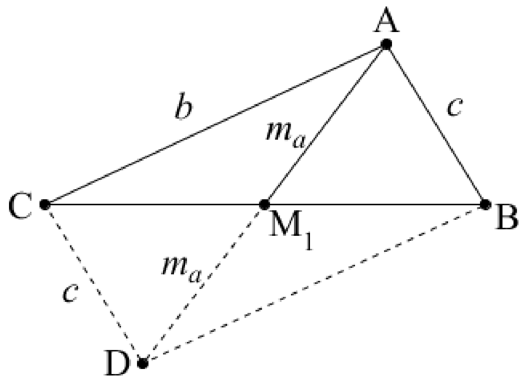


Рис. 25

∇ Подвоївши медіану m_a (рис. 26), одержимо паралелограм $ABDC$. Тоді $CD = AB = c$.

Далі, в трикутнику ACD, маємо: $2m_a < b + c$ (за нерівністю трикутника).

Отже, $m_a < (b + c)/2$.■

№ 15. В ΔABC медіана AM_1 в чотири рази менша сторони AB, а $\angle M_1AB = 60°$. Знайти величину кута BAC.

Розв'язання

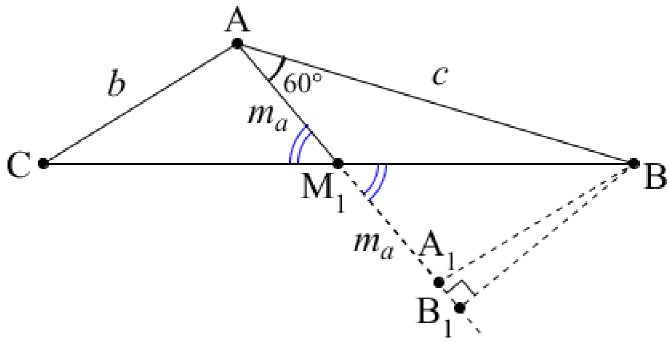


Рис. 26

∇ За умовою, $c = 4m_a$. Подвоївши медіану m_a (рис. 27), одержимо $AA_1 = 2m_a = c/2$.

Проведемо $BB_1 \perp AA_1$. Так, як $\angle ABB_1 = 30°$, то $AB_1 = c/2$. Тоді $AB_1 = AA_1$, тобто $A_1 \equiv B_1$.

$\Delta AM_1C = \Delta A_1M_1B$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тоді $\angle CAM_1 = 90°$, а $\angle BAC = 150°$. ■

№ 16. Через точку O всередині кута A провести пряму так, щоб відрізок, який одержується при перетині цієї прямої із сторонами кута, ділиться точкою O навпіл.

Розв'язання

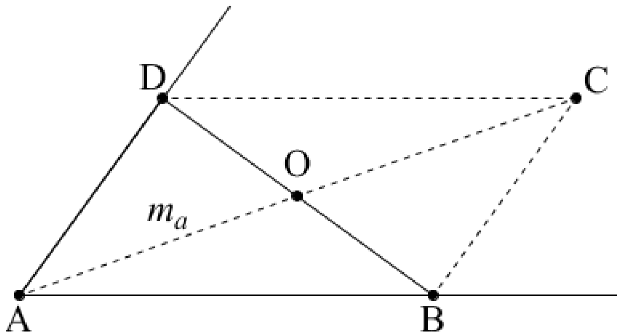


Рис. 27

∇ З рис. 28 видно, що точка O має бути основою медіани, проведеної з вершини A трикутника ABD.

Розглянемо побудову шуканої прямої.

Подвоївши m_a, одержимо точку C. Проведемо через точку C прямі паралельно сторонам кута A до перетину з цими сторонами у точках B і D.

Оскільки $ABCD$ – паралелограм і O – середина діагоналі AC, то $BO = OD$. Таким чином, BD – шукана пряма.■

№ 17. $ABCD$ – трапеція ($AD \parallel BC$) з перпендикулярними діагоналями (рис. 29). На основі AD взято точку K так, що $AK = MN = m$, де MN – середня лінія трапеції. Знайти CK.

Розв'язання

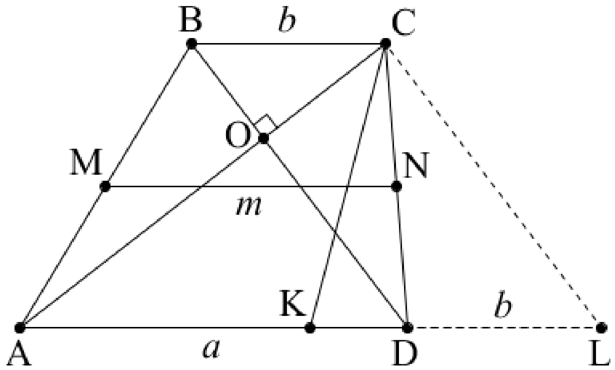


Рис. 28

∇ Проведемо CL.

Тоді $\angle ACL = \angle AOD = 90°$ і $AL = AD + DL = AD + BC = a + b$.

Так, як $AK = MN = (a + b)/2$, то CK – медіана, проведена з вершини прямого кута ΔACL. Тому

$$CK = AL/2 = (a + b)/2 = m.$$■

№ 18. Побудувати трикутник за двома його сторонами a, b і медіаною m_c третьої сторони.

Розв'язання

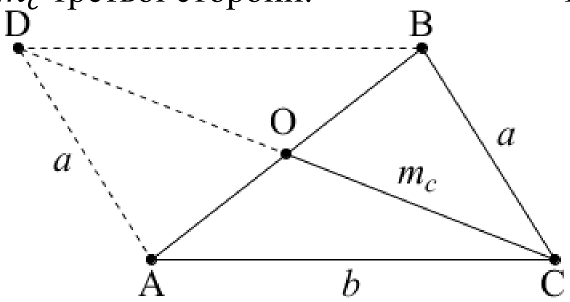


Рис. 29

∇ 1) Аналіз. Нехай ΔABC – шуканий (рис. 31). Подвоїмо медіану $CO = m_c$. Одержимо паралелограм $ACBD$. В ΔADC відомі всі три сторони: $AD = a$, $AC = b$ і $DC = 2m_c$.

2) Побудова. Побудуємо ΔADC за трьома сторонами: a, b та $2m_c$. Доповнимо його до паралелограма ($BD \parallel AC$ і $BC \parallel AD$). Сполучивши вершини A та B, одержимо шуканий ΔABC.

3) Доведемо, що ΔABC задовольняє умовам задачі. За побудовою, $ACBD$ – паралелограм, отже, $BC = AD = a$, $CO = \frac{1}{2}CD = m_c$, $AC = b$ і $AO = OB$, тобто CO – медіана.

4) Дослідимо можливість побудови. Побудова можлива і єдина, коли можливо побудувати ΔADC, тобто коли $a + b > 2m_c$, $a + 2m_c > b$ та $b + 2m_c > a$. Ці три нерівності можна звести до двох: $a + b > 2m_c$ та $|a - b| < 2m_c$, які означають, що сума довжин відрізків a і b більше довжини відрізка $2m_c$, а різниця довжин цих відрізків (від більшого віднімається менший) менша довжини відрізка $2m_c$.■

№ 19. Точки M і N лежать на бічних сторонах AB і BC (рис. 32) рівнобедреного ΔABC, $AM = \frac{2}{3}AB$, а $CN = \frac{1}{4}BC$. В якому відношенні відрізок MN ділить висоту BH_2?

Розв’язання

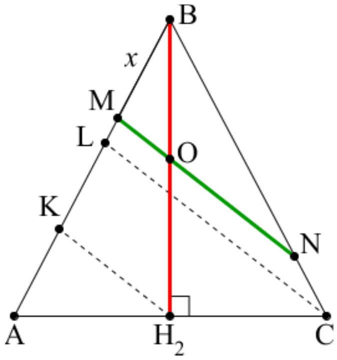


Рис. 30

∇ Нехай $BM = x$. Тоді $AM = 2x$. З точок C і H_2 проведемо прямі, паралельні MN. Тоді, за теоремою Фалеса, матимемо:

$$\frac{LM}{MB} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{AK}{KL} = \frac{AH_2}{H_2C} = \frac{1}{1}.$$

З цього випливає, що $LM = x/3$, $AK = KL$.

Так, як $AM = 2KL + LM$, то $2x = 2KL + x/3$, звідки $KL = \frac{5}{6}x$. Тоді $KM = AM - AK = 2x - \frac{5}{6}x = \frac{7}{6}x$.

Отже, шукане відношення обчислюється наступним чином:

$$\frac{BO}{OH_2} = \frac{BM}{MK} = \frac{x}{7x/6} = \frac{6}{7}. \blacksquare$$

№20. $ABCD$ – описана трапеція $(AD \parallel BC)$. Знайти відношення середньої лінії до периметра цієї трапеції.

Розв’язання

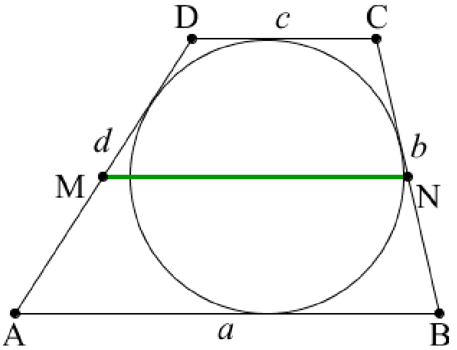


Рис. 31

∇ Нехай $ABCD$ – дана трапеція (рис. 33), у якої $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ і $AD = d$. Тоді $a + c = b + d$, і її периметр $P_{ABCD} = 2(a + c)$, а середня лінія $MN = (a + c)/2$.

Тому шукане відношення

$$\frac{MN}{P_{ABCD}} = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

№ 21. У ΔABC проведено бісектриси BL_2 та AL_1. Відрізок L_1L_2 лежить на бісектрисі кута AL_1C. Знайти величину кута BAC.

Розв’язання

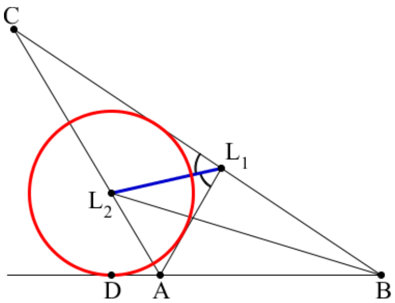


Рис. 32

∇ Нехай AL_1 та BL_2 – бісектриси даного ΔABC (рис. 34). Розглянемо ΔAL_1B. Так, як за умовою L_1L_2 бісектриса кута AL_1C, то L_2 – центр зовнівписаного кола ΔAL_1B, яке дотикається до сторони AL_1. Нехай D – точка дотику зовнівписаного кола до прямої AB.

$$\angle L_1AB = \angle L_1AC = \angle CAD.$$

Так, як кут BAD – розгорнутий, то $\angle L_1AB = \angle L_1AC = \angle CAD = 60°$. Таким чином $\angle BAC = 120°$.■

В лекції використовувались наступні **умовні позначення:**

A, B, C – вершини трикутника.

a, b, c – сторони трикутника.

M_1 – середина сторони BC.

$m_a = AM_1$ – медіана, проведена з вершини A.

H_1 – основа висоти, проведеної з вершини A.

$h_a = AH_1$ – висота, проведена з вершини A.

L_1 – основа бісектриси, проведеної з вершини A.

$l_a = AL_1$ – бісектриса, проведена з вершини A.

W_1 – точка перетину бісектриси кута A з описаним колом.

M – точка перетину медіан (центр мас; центроїд).

I – точка перетину бісектрис (інцентр) – центр вписаного кола.

O – центр описаного кола (точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника).

H – точка перетину висот (ортоцентр).

r – радіус вписаного в трикутник ABC кола.

R – радіус описаного навколо трикутника ABC кола.

$2p$ – периметр трикутника ABC.

∇ – початок розв’язання задачі.

■ – кінець розв’язання задачі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

Перевірте засвоєння матеріалу, відповівши на контрольні питання:

1. Якою властивістю володіє трикутник, якщо:
   а) центр описаного кола лежить на одній із сторін?
   б) центр описаного кола співпадає з центром вписаного кола?
2. Навколо якої трапеції можна описати коло?
3. В яку трапецію можна вписати коло?
4. Чи можуть усі сторони трикутника бути меншими 1 мм, а радіус описаного кола більшим 1 км?
5. Чи можна стверджувати, що паралелограм є прямокутником, коли відомо, що діагоналі цього паралелограма рівні?
6. Якою властивістю володіє висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута?
7. В який паралелограм можна вписати коло?
8. Навколо якого паралелограма можна описати коло?
9. Кожну сторону прямокутного трикутника збільшили на 1. Який вид має одержаний трикутник: гострокутний, прямокутний чи тупокутний?
10. Чи може один із катетів прямокутного трикутника дорівнювати радіусу описаного кола?
11. Яку дугу стягує діаметр кола?
12. Яку дугу стягує хорда кола, рівна радіусу цього кола?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №4

№ 1. В коло вписано трапецію, вершини якої ділять коло на дуги, що відносяться, як 2 : 7 : 20 : 7. Знайти кути трапеції.

№ 2. Доведіть, що в чотирикутнику, описаному навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.

№ 3. Нехай a і b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, r – радіус вписаного кола. Доведіть, що радіус r можна обчислити за формулою

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

№ 4. Доведіть, що в будь-якому прямокутному трикутнику гіпотенузу видно з інцентра (центра вписаного кола) під кутом $135°$.

№5. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 4см і 8см, а кут між діагоналями – прямий. Знайдіть висоту цієї трапеції.

№ 6. В рівнобедреній трапеції з перпендикулярними діагоналями середня лінія дорівнює l. Знайдіть висоту цієї трапеції.

№ 7. В трикутнику ABC висота AH_1 дорівнює медіані BM_2. Знайдіть величину кута CBM_2.

№ 8. Бісектриса AL_1 трикутника ABC ділить сторону BC у відношенні $CL_1 : L_1B = 2 : 1$. В якому відношенні ділить цю бісектрису медіана CM_3?

№ 9. В рівнобедреному трикутнику центри вписаного і описаного кіл симетричні відносно основи трикутника. Які величини кутів цього трикутника?

№10. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина сторони BC, а N – середина CD. Доведіть, що прямі AM і AN ділять діагональ BD на три рівні частини.

№11. Вершини чотирикутника $ABCD$ лежать на колі, причому AB – діаметр, а сторона CD рівна радіусу. Знайти кут між продовженнями двох інших сторін.

ВКАЗІВКИ ТА ВІДПОВІДІ:

№1 <u>Відповідь:</u> $45°, 135°, 135°, 45°$.

№2, №3. Скористатися властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї і тієї ж точки.

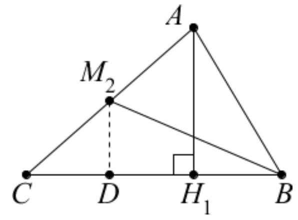
№4. Знайти залежність шуканого кута від кута в 90^0.

№5. Провести висоту через точку перетину діагоналей і скористатися властивістю медіани, проведеної з вершини прямого кута. <u>Відповідь:</u> 6 см.

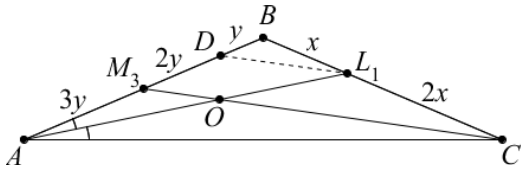
№6. Див. вказівку до попередньої задачі. <u>Відповідь:</u> $h = l$.

№7. Скористатися властивістю середньої лінії та прямокутного трикутника з кутом в 30^0.

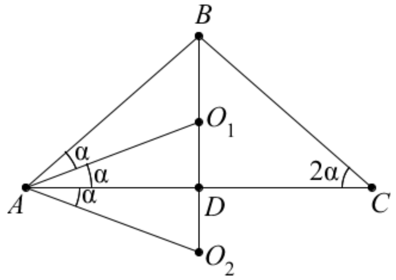
<u>Відповідь:</u> 30°.



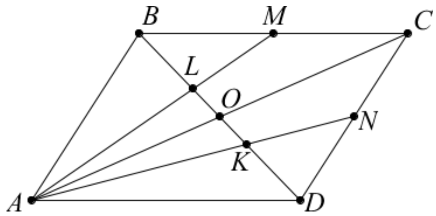
№8.Здійснити добудову та скористатися теоремою Фалеса: <u>Відповідь:</u> 3:2.



№9. Скористатися властивістю інцентра та центра описаного кола. Скористатися мал. <u>Відповідь</u>**:** 36°, 36° і 108°.



№10.Скористатися властивостями медіан трикутників ABC та CDA.



№11.Скористатися формулою обчислення кута між двома січними. <u>Відповідь: </u>60°.