

Лекція 3

Розклад многочлена на множники.

Формули скороченого множення

Контрольні запитання (по лекції 2).

1. Що таке одночлен, коефіцієнт та степінь одночлена, одночлен стандартного вигляду?
2. Що таке многочлен, подібні члени многочлена, многочлен стандартного вигляду?
3. Як додати два многочлени, помножити одночлен на многочлен, перемножити два многочлени?

Приклад 1. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ дорівнює 16.

Перемножаючи многочлени почленно, одержимо:

$$(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1) = x^3 - 4x^2 + 7x + 3x^2 - 12x + 21 - (x^3 - x^2 - 5x + 5) = 16, \text{ після зведення подібних доданків. } \blacksquare$$

Якщо многочлен потрібно подати у вигляді добутку кількох множників, то говорять, що необхідно **розкласти многочлен на множники**. Для цього існує багато різних способів, зокрема **винесення спільного множника за дужки**.

Приклад 2. Розкладіть на множники $(5m - n)^3(m + 8n)^2 - (5m - n)^2(m + 8n)^3$.

Винесемо за дужки спільний множник $(5m - n)^2(m + 8n)^2$. Одержимо, що $(5m - n)^3(m + 8n)^2 - (5m - n)^2(m + 8n)^3 = (5m - n)^2(m + 8n)^2(5m - n - m - 8n) = (5m - n)^2(m + 8n)^2(4m - 9n)$

Відповідь. $(5m - n)^2(m + 8n)^2(4m - 9n)$.

Метод винесення спільного множника є найпростішим, проте він «не працює», якщо множника спільного для всіх членів многочлена не існує. Тоді спочатку члени многочлена необхідно об'єднати у групи так, щоб доданки кожної групи мали спільний множник, а вже потім виносити його за дужки. В цьому полягає метод **групування доданків**.

Приклад 3. Розкладіть на множники: 1) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$, де n – натуральне число, 2) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

1) за властивостями натурального степеня: $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1} = 3y^2(y^{n+1} - 1) + 5(y^{n+1} - 1) = (y^{n+1} - 1)(3y^2 + 5)$.

2) групування доданків можна здійснити різними способами.

Якщо винести спільний множник з | Якщо винести спільний множник з

кожної пари доданків:

$$\begin{aligned} a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5 &= \\ &= a^4(a - b) + a^2b^2(a - b) + b^4(a - b) = \\ &= (a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

кожної трійки доданків:

$$\begin{aligned} a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5 &= \\ &= a^3(a^2 - ab + b^2) - b^3(a^2 - ab + b^2) = \\ &= (a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Як бачимо, різні способи розв'язку можуть привести до різних форм відповіді.

Відповідь. 1) $(y^{n+1} - 1)(3y^2 + 5)$, 2) $(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$ або $(a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2)$.

Метод групування можна використовувати і для швидких обчислень.

Приклад 4. Обчисліть (не використовуючи калькулятор): $34,4 \cdot 13,7 - 34,4 \cdot 8,7 - 15,6 \cdot 8,7 + 13,7 \cdot 15,6$.

$$\begin{aligned} 34,4 \cdot 13,7 - 34,4 \cdot 8,7 - 15,6 \cdot 8,7 + 13,7 \cdot 15,6 &= \\ &= 34,4(13,7 - 8,7) + 15,6(13,7 - 8,7) = \\ &= 34,4 \cdot 5 + 15,6 \cdot 5 = 5(34,4 + 15,6) = 5 \cdot 50 = 250. \end{aligned}$$

Як і в попередньому прикладі, ми могли згрупувати доданки й інакше (наприклад, перший з четвертим, а другий з третім), але отримана відповідь була б тою самою.

Відповідь. 250.

За допомогою правила множення многочленів можемо довести наступні формули **скороченого множення**¹:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ (різниця квадратів);}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (квадрат суми);}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (квадрат різниці);}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ (різниця кубів);}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ (сума кубів);}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (куб суми);}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ (куб різниці).}$$

Приклад 5. Розкладіть вираз $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$ на множники.

За формулою різниці квадратів:
 $(ab + 1)^2 - (a + b)^2 =$
 $= (ab + 1 - a - b)(ab + 1 + a + b).$

За формулою квадрату суми, після зведення подібних доданків та застосування методу групування:
 $(ab + 1)^2 - (a + b)^2 =$
 $a^2b^2 + 2ab + 1 - a^2 - 2ab - b^2 =$
 $= a^2(b^2 - 1) - (b^2 - 1) =$

¹ Надалі ці формули необхідно вивчити і застосовувати вже без доведення (немає необхідності кожного разу почленно множити многочлени), в тому числі і у задачах на розклад многочленів на множники. Це суттєво спрощує розв'язування задач і заощаджує час, але вимагає, щоб формули скороченого множення були дійсно вивчені та опрацьовані на великій кількості задач!

$$| (b^2 - 1)(a^2 - 1).$$

Відповідь. $(ab + 1 - a - b)(ab + 1 + a + b)$ або $(b^2 - 1)(a^2 - 1)$.

Приклад 6. Обчисліть $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16)$.

Тричі застосовуючи формулу різниці квадратів, одержимо: $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16) = 5^{24} - (5^6 - 4)(5^6 + 4)(5^{12} + 16) =$
 $= 5^{24} - (5^{12} - 16)(5^{12} + 16) = 5^{24} - (5^{24} - 256) = 256.$

Відповідь. 256.

Приклад 7. Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз: $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

Згрупуємо доданки в дужках і застосуємо спочатку формулу різниці квадратів, а потім квадрату суми: $((a + b) + (c + d))((a + b) - (c + d)) =$
 $= (a + b)^2 - (c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2.$

Відповідь. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2.$

Приклад 8. Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$.

Помітимо, що, внаслідок формул квадрату суми та різниці, справедливі рівності

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x + 3)^2 \text{ та}$$

$$y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 = (y - 1)^2.$$

Тоді $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$
 $= (x + 3)^2 + (y - 1)^2.$

Відповідь. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2.$

Приклад 9. Відомо, що числа x, y такі, що $(x^2 + y^2) = 1$. Знайдіть значення виразу $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

Піднесемо обидві частини заданої рівності до кубу. За формулою кубу суми одержимо:

$$1 = (x^2 + y^2)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2y^2 + 3x^2(y^2)^2 + (y^2)^3 =$$

$$= x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = x^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2) + y^6.$$

Використавши в останній рівності, що за умовою $(x^2 + y^2) = 1$, одержимо вираз, який і треба було знайти.

Відповідь. 1.

Розкладемо у шуканому виразі $x^6 + y^6$ за формулою суми кубів: і двічі використаємо умову:

$$x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = 3x^2y^2 + (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) =$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = 1.$$

Домашня робота №3:

1. Обчисліть $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$.

2. Доведіть тотожність:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

3. Розкладіть на множники $(3x+7)(4y-1)-(4y-1)(2x+10)$.

4. Розкладіть на множники: 1) $b^{n+2}-b-1+b^{n+1}$, де n – натуральне число, 2) $x^3y^3-x^2y^2+xy-6+6xy-6x^2y^2$

5. Обчисліть: 1) $58,7 \cdot 1,2 + 36 \cdot 3,52 - 34,7 \cdot 1,2 - 2,32 \cdot 36$,

2) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2,8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2,2$.

6. Розкладіть вираз $(a+2b)^2-(ab+2)^2$ на множники двома способами: 1) за формулою різниці квадратів, 2) розкриваючи дужки та застосовуючи метод групування.

7. Обчисліть $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{144}\right)$.

8. Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз: 1) $(a+b+c)(a+b-c)$, 2) $(a+b+c)(a-b-c)$.

9. Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен: 1) $2a^2-2a+1$, 2) $a^2+b^2+2a+2b+2$, 3) $10x^2-6xy+y^2$.

10. Відомо, що числа x, y такі, що $x^3-y^2=2$. Знайдіть значення виразу $x^9-6x^3y^2-y^6$.

11. Доведіть, що коли $a+3b=2$, то $a^3+27b^3=8-18ab$.

12. Доведіть тотожність $(2^n-3^n)^3-8^n+27^n=-3 \cdot 6^n(2^n-3^n)$.

13. Доведіть тотожність

$$(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3=-3(a-b)(b-c)(a-c).$$

Відповіді та вказівки

1. При будь-якому значенні змінної вираз дорівнює -11 .

2. *Вказівка: перемножте многочлени почленно.*

3. *Вказівка: винесіть спільний множник за дужки.*

4. *Вказівка: використайте метод групування доданків.*

5. 1) 72, 2) 25.

6. 1) $(a+2b-ab-2)(a+2b+ab+2)$, 2) $(a^2-4)(1-b^2)$.

7. *Вказівка: розкладіть кожен множник на добуток за формулою різниці квадратів.* $\frac{13}{24}$.

8. 1) $a^2+2ab+b^2-c^2$, 2) $a^2-b^2-2bc-c^2$.

9. 1) $a^2+(a-1)^2$, 2) $(a+1)^2+(b+1)^2$, 3) $x^2+(3x-y)^2$.

10. 8.

11. *Вказівка: піднесіть обидві частини заданої рівності до кубу, використайте формулу кубу суми та перетворіть отриману рівність, ще раз використавши умову.*

12. *Вказівка: використайте формулу кубу різниці та винесіть спільний множник за дужки.*

13. *Вказівка: використайте формулу кубу різниці.*