

## Чотирикутники

### 1. Означення паралелограма, ромба, прямокутника, квадрата, трапеції.

*Означення.* Паралелограмом називається чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

*Означення.* Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

*Означення.* Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні.

*Означення.* Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

*Означення.* Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні. Паралельні сторони трапеції називаються основами, не паралельні – бічними сторонами. Якщо бічні сторони трапеції рівні, то така трапеція називається рівнобедреною, або рівнобічною. Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають прямокутною.

*Середньою лінією трапеції* називається відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції.

### 2. Властивості чотирикутників.

#### *Паралелограм*

1. У паралелограмі протилежні сторони і кути рівні.
2. Суміжні кути паралелограма в сумі дають  $180^{\circ}$ .
3. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

#### *Прямокутник*

1. Діагоналі прямокутника рівні.
2. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, його центр – точка перетину діагоналей прямокутника, а радіус – половина діагоналі.

#### *Ромб*

1. Діагоналі ромба перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.
2. У будь-який ромб можна вписати коло, його центр – точка перетину діагоналей ромба, радіус – половина висоти ромба.

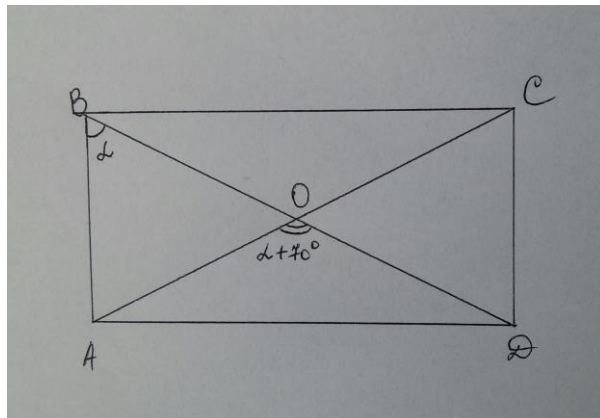
#### *Трапеція*

1. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.
2. У рівнобічній трапеції: а) кути при кожній основі рівні; б) діагоналі рівні; в) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює піврізниці основ, а більший – півсумі основ (тобто середній лінії трапеції).

### Розв'язування задач:

1. Знайти кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він на  $70^\circ$  менший від кута між діагоналями, який лежить навпроти більшої сторони.

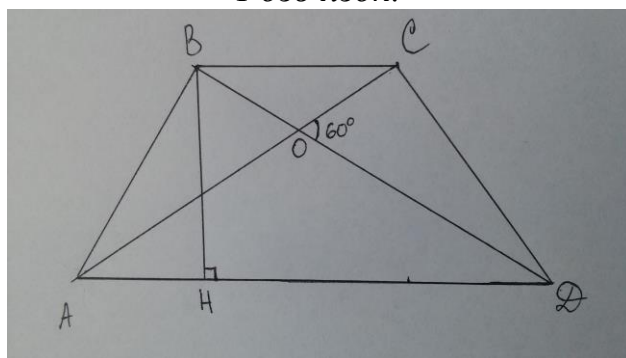
*Розв'язок:*



Розглянемо рівнобедрений трикутник AOB ( $AO=OB$ ), отже, кут  $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ .  $\angle AOD$  – зовнішній кут трикутника AOB, тому  $\alpha + \alpha = \alpha + 70^\circ$ , звідки  $\alpha = 70^\circ$ .

2. Висота рівнобічної трапеції дорівнює  $h$ , а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом  $60^\circ$ . Знайти діагональ трапеції.

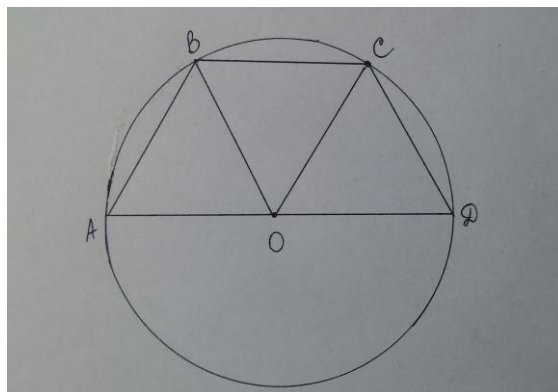
*Розв'язок:*



Розглянемо рівнобедрений трикутник AOD ( $AO=OD$ , оскільки трапеція рівнобедрена). Кут COD – зовнішній для цього трикутника, тому  $\angle OAD + \angle ODA = 60^\circ$ . Оскільки обидва кути рівні, то кожен із них дорівнює  $30^\circ$ . Розглянемо трикутник BHD – прямокутний,  $BD=2 BH$  (катет навпроти кута  $\angle BDH = 30^\circ$ ). Отже, діагональ трапеції дорівнює  $2h$ .

3. Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі. Знайти кути трапеції, якщо основи відносяться як 1:2.

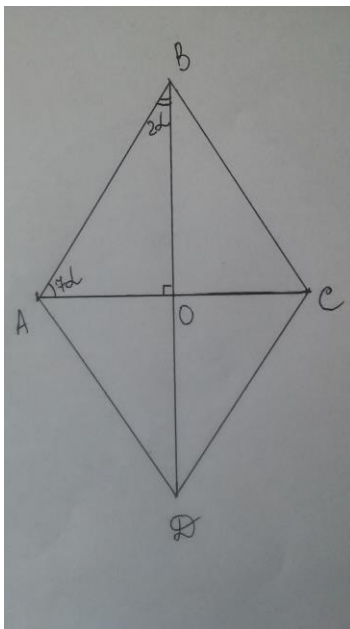
*Розв'язок:*



Оскільки  $AD$  – діаметр кола, то  $AD=2R$ , і тоді з умови  $BC=R$ . Але  $OB=OC=R$ , тому трикутник  $OBC$  – рівносторонній ( $\angle BCO = 60^\circ$ ).  $ABCO$  – паралелограм, звідки  $\angle BAO = 60^\circ$ . Отже, кути трапеції  $60^\circ$  і  $120^\circ$ .

4. Які кути має ромб, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, що відносяться як 2:7.

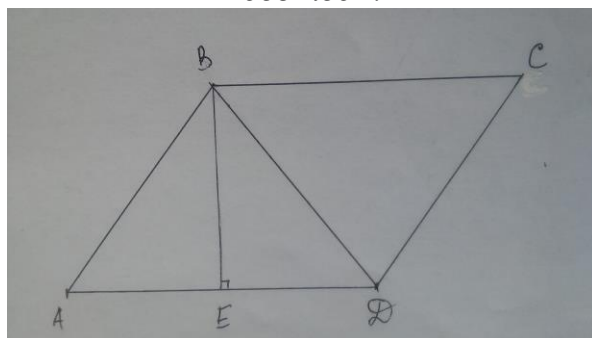
*Розв'язок:*



Розглянемо прямокутний трикутник  $AOB$ . Сума його гострих кутів  $7\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ , звідки  $\alpha = 10^\circ$ . Оскільки діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то  $\angle A = 14\alpha = 140^\circ$ ,  $\angle B = 4\alpha = 40^\circ$ .

5. У паралелограмі  $ABCD$  кут  $A$  дорівнює  $60^\circ$ , висота  $BE$  ділить сторону  $AD$  на 2 рівні частини. Знайти  $BD$ , якщо периметр паралелограма 48 см.

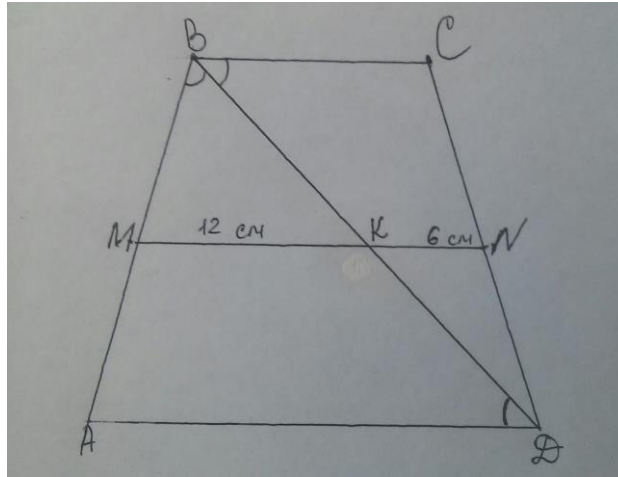
*Розв'язок:*



Розглянемо рівнобедрений трикутник  $ABD$ , оскільки висота  $BE$  водночас медіана за умовою. Але кут  $A$   $60^\circ$ , то цей трикутник – рівносторонній. Отже, паралелограм  $ABCD$  – ромб, його сторона дорівнює  $48:4=12$  см, а з трикутника  $ABD$ :  $AD=AB=12$  см.

6. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить середню лінію на відрізки 6 і 12 см. Знайти периметр трапеції.

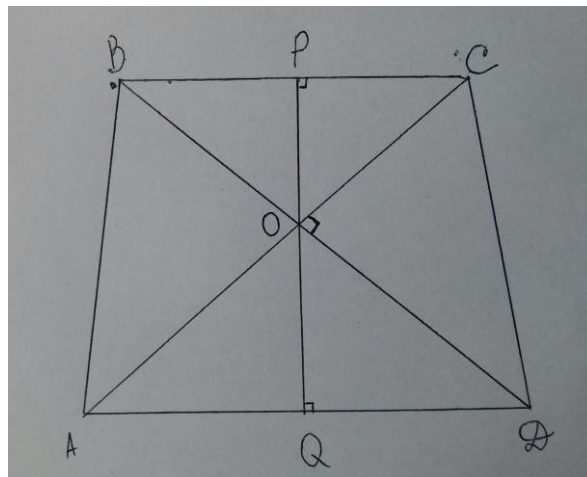
Розв'язок:



За умовою  $\angle ABD = \angle CBD$ . Але  $\angle CBD = \angle BDA$  (внутрішні різносторонні), тому трикутник  $ABD$  – рівнобедрений.  $AD=AB=24$  см (бо  $MK$  – середня лінія трикутника  $ABD$ ),  $BC=2KN=12$  см ( $KN$  – середня лінія  $DBC$ ). Отже, периметр трапеції дорівнює  $(24+24+24+12)$  см = 84 см.

7. У рівнобічній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні. Довести, що висота дорівнює середній лінії трапеції.

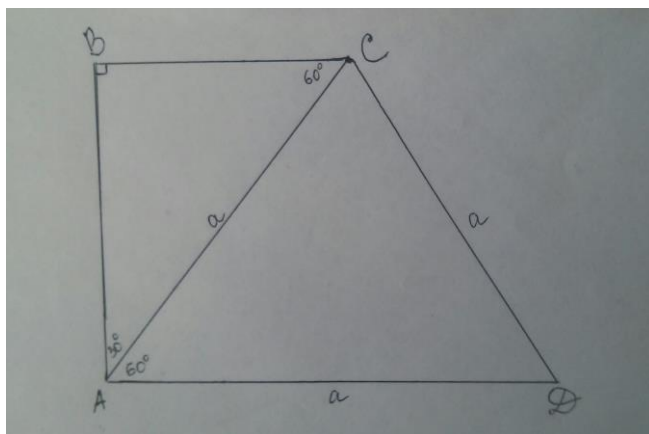
Розв'язок:



Проведемо висоту через точку перетину діагоналей трапеції. Розглянемо трикутник  $BOC$  – прямокутний (за умовою) і рівнобедрений (оскільки трапеція рівнобічна), у ньому  $OP$  – медіана і висота. Отже,  $\angle CBO = \angle BCO = 45^\circ$ , тому трикутник  $BPO$  – теж прямокутний рівнобедрений,  $OP = BP = \frac{BC}{2}$ . Здійснімо аналогічні міркування для трикутника  $AOD$ , звідки  $OQ = AQ = \frac{AD}{2}$ . Висота трапеції  $PQ = OP + OQ = \frac{BC + AD}{2}$ , що й потрібно було довести.

8. Прямокутну трапецію діагональ ділить на два трикутники: правильний зі стороною  $a$  і прямокутний. Знайти середню лінію трапеції.

Розв'язок:

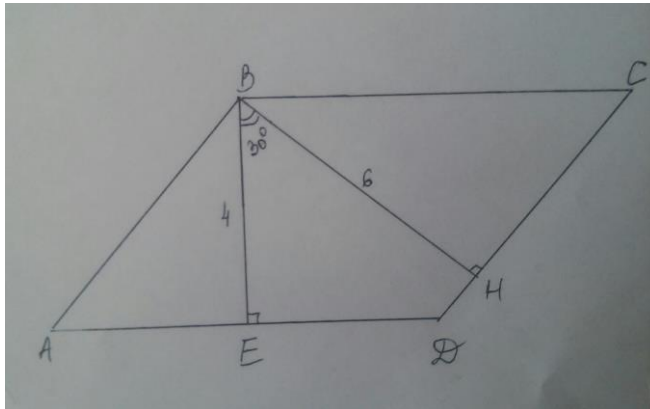


У задачі не вказано, яка саме діагональ поділила трапецію на два трикутники, але якщо обрати більшу діагональ, то отримаємо один трикутник прямокутний, а інший – тупокутний, який не може бути рівностороннім. Отже, ділимо трапецію на два трикутники меншою діагоналлю. Трикутник ACD – рівносторонній,  $\angle CAD = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ , тоді  $BC = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ . Середня лінія трапеції дорівнює

$$\frac{a + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

9. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює  $30^\circ$ . Знайти периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 і 6 см.

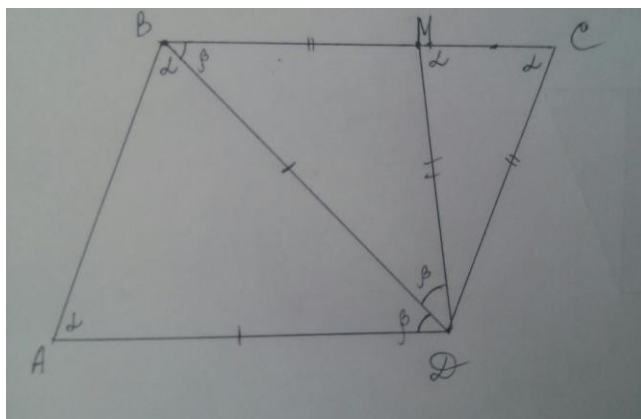
*Розв'язок:*



Нехай BE та BH – висоти паралелограма, проведені із вершини тупого кута паралелограма ABCD. Розглянемо опуклий чотирикутник BEDH, сума його кутів  $360^\circ$ , звідки  $\angle D = 150^\circ$ , отже  $\angle A = 30^\circ$ . Тому в прямокутному трикутнику ABE гіпотенуза  $AB = 2BE = 8$  см, аналогічно в трикутнику BHC:  $BC = 2BH = 12$  см. Периметр паралелограма дорівнює  $(16 + 24) = 40$  см.

10. На стороні BC паралелограма ABCD існує така точка M, що  $BM = MD = CD$ . Знайти кути паралелограма, якщо  $AD = BD$ .

*Розв'язок:*



Розглянемо трикутник ABD – рівнобедрений. Позначимо  $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$ ,  $\angle BDA = \beta$ . Також  $\angle BDA = \angle DBM = \beta$ , як внутрішні різносторонні. У рівнобедреному трикутнику BDM :  $\angle BDM = \angle DBM = \beta$ . Трикутник MCD – теж рівнобедрений за умовою, тому  $\angle DMC = \angle DCM = \alpha$ , але  $\angle DMC = \angle ADM = \alpha$ , як внутрішні різносторонні. Тому  $\alpha = 2\beta$  (1). А в трикутнику ABD сума кутів  $2\alpha + \beta = 180^\circ$  (2).

Розв'язуючи систему рівнянь (1)-(2), отримуємо  $\alpha = 72^\circ$ , інший кут паралелограма дорівнює  $108^\circ$ .

### Домашнє завдання (чотирикутники)

1. Два кути паралелограма відносяться як 1:5. Знайти кут між висотами паралелограма, проведеними із вершини а) тупого; б) гострого кута паралелограма.
2. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки, один з яких на 3 см більший від іншого, рахуючи від вершини тупого кута. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 18 см.
3. Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайти кути трапеції.
4. Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут  $150^\circ$ , сторони паралелограма дорівнюють 10 і 18 см. Знайти висоти паралелограма.
5. У паралелограмі ABCD бісектриси кутів A і D поділяють сторону BC на три рівних відрізки. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.
6. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайти кути трапеції.
7. Відомо, що висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ. Знайти кути трапеції.
8. У прямокутнику ABCD  $AD = 2AB$ . На стороні BC позначено точку M так, що кути AMB і AMD рівні. Знайти ці кути
9. Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини основ. Довести, що діагоналі цієї трапеції перпендикулярні.
10. Дано паралелограм ABCD. Бісектриси кутів BAC і BDC перетинаються в точці M так, що кут AMD =  $45^\circ$ . Довести, що ABCD – ромб.
11. Довести, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

### Відповіді:

1. а)  $30^\circ$ ; б)  $150^\circ$ . 2. 4 і 5 см. 3.  $60^\circ$  і  $120^\circ$ . 4. 5 і 8 см. 5. 8 і 12 або 5 і 15 см. 6.  $72^\circ$  і  $108^\circ$ .
7.  $45^\circ$  і  $135^\circ$ . 8.  $75^\circ$ .