Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 10 клас

1. Скільки додатних коренів, в залежності від значень параметра a, має рівняння

$$\frac{2x-1}{2x-1}\cdot|x^2-2x|=a?$$

2. Знайдіть площу фігури, утвореної на координатній площині xOy усіма точками $M(x,y)$, координати яких задовольняють нерівність $|x|+|y|+|y-1|\le 4$.

3. Знайти всі цілі числа n, при яких число $\sqrt{n^2+3n+38}$ також ціле.

4. Множина натуральних чисел B називається *хорошою*, якщо не існує елемента $x\in B$, що є дільником суми всіх інших елементів з B. Знайдіть найбільшу кількість елементів в хорошій підмножині множини $A=\{1,2,3,...,50\}$.

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай E — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle EDC=\angle DEC=\angle BAD$. F — точка на відрізку BC така, що $\angle BAF+\angle EBF=\angle BFE$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABFD$ можна описати коло.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 10 клас

1. Скільки додатних коренів, в залежності від значень параметра a, має рівняння

$$\frac{2x-1}{2x-1}\cdot|x^2-2x|=a?$$

2. Знайдіть площу фігури, утвореної на координатній площині xOy усіма точками $M(x,y)$, координати яких задовольняють нерівність $|x|+|y|+|y-1|\le 4$.

3. Знайти всі цілі числа n, при яких число $\sqrt{n^2+3n+38}$ також ціле.

4. Множина натуральних чисел B називається *хорошою*, якщо не існує елемента $x\in B$, що є дільником суми всіх інших елементів з B. Знайдіть найбільшу кількість елементів в хорошій підмножині множини $A=\{1,2,3,...,50\}$.

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай E — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle EDC=\angle DEC=\angle BAD$. F — точка на відрізку BC така, що $\angle BAF+\angle EBF=\angle BFE$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABFD$ можна описати коло.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 10 клас

1. Скільки додатних коренів, в залежності від значень параметра a, має рівняння

$$\frac{2x-1}{2x-1}\cdot|x^2-2x|=a?$$

2. Знайдіть площу фігури, утвореної на координатній площині xOy усіма точками $M(x,y)$, координати яких задовольняють нерівність $|x|+|y|+|y-1|\le 4$.

3. Знайти всі цілі числа n, при яких число $\sqrt{n^2+3n+38}$ також ціле.

4. Множина натуральних чисел B називається *хорошою*, якщо не існує елемента $x\in B$, що є дільником суми всіх інших елементів з B. Знайдіть найбільшу кількість елементів в хорошій підмножині множини $A=\{1,2,3,...,50\}$.

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай E — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle EDC=\angle DEC=\angle BAD$. F — точка на відрізку BC така, що $\angle BAF+\angle EBF=\angle BFE$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABFD$ можна описати коло.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 11 клас

1. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність $\{x\}^2+\{y\}^2=1$.

2. Розв'яжіть рівняння
$$\left|x-\frac{5\pi}{12}\right|+\left|x+\frac{\pi}{12}\right|=\arcsin\frac{x^3-x+2013}{2013}.$$

3. Додатні дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{y^2-3x+1}=2\sqrt{1+z^2}$. Доведіть, що $x^2+y^2\geq 2z^2$.

4. З множини $\{1,2,3,...,2013\}$ обираються пари чисел. Кожне число можна використати не більше одного разу, а суми чисел в кожній парі мають бути попарно різні. Яку максимальну кількість пар можна утворити?

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай I — центр кола вписаного в нерівносторонній трикутник ABC. Промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Описане коло трикутника CDI вдруге перетинає промінь BI у точці K. Доведіть, що $BK=CK$.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 11 клас

1. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність $\{x\}^2+\{y\}^2=1$.

2. Розв'яжіть рівняння
$$\left|x-\frac{5\pi}{12}\right|+\left|x+\frac{\pi}{12}\right|=\arcsin\frac{x^3-x+2013}{2013}.$$

3. Додатні дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{y^2-3x+1}=2\sqrt{1+z^2}$. Доведіть, що $x^2+y^2\geq 2z^2$.

4. З множини $\{1,2,3,...,2013\}$ обираються пари чисел. Кожне число можна використати не більше одного разу, а суми чисел в кожній парі мають бути попарно різні. Яку максимальну кількість пар можна утворити?

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай I — центр кола вписаного в нерівносторонній трикутник ABC. Промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Описане коло трикутника CDI вдруге перетинає промінь BI у точці K. Доведіть, що $BK=CK$.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, 11 клас

1. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність $\{x\}^2+\{y\}^2=1$.

2. Розв'яжіть рівняння
$$\left|x-\frac{5\pi}{12}\right|+\left|x+\frac{\pi}{12}\right|=\arcsin\frac{x^3-x+2013}{2013}.$$

3. Додатні дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{y^2-3x+1}=2\sqrt{1+z^2}$. Доведіть, що $x^2+y^2\geq 2z^2$.

4. З множини $\{1,2,3,...,2013\}$ обираються пари чисел. Кожне число можна використати не більше одного разу, а суми чисел в кожній парі мають бути попарно різні. Яку максимальну кількість пар можна утворити?

5. Задано функцію $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для якої $\forall n\in\mathbb{N}:\ f(n)>n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1}=f(a_n),\ a_1\in\mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n\in\mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i\in\{0,1\}$; 2) для довільного $a_1\in\mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

6. Нехай I — центр кола вписаного в нерівносторонній трикутник ABC. Промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Описане коло трикутника CDI вдруге перетинає промінь BI у точці K. Доведіть, що $BK=CK$.

Відкрита олімпіада з математики УФМЛ КНУ, Розв'язання

10 клас

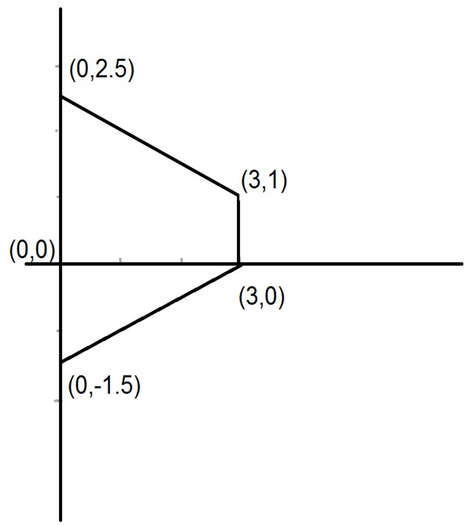
1. *(І.Я. Вишенська)* Скільки додатних коренів, в залежності від значень параметра a, має рівняння

$$\frac{2x-1}{2x-1} \cdot |x^2 - 2x| = a?$$

Розв'язання. Зрозуміло, що потрібно відшукати кількість розв'язків рівняння $|x^2-2x| = a$ з множини $E = (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$. Побудувавши графік правої частини бачимо, що при $a > 1$ — 1 корінь, при $a = 1$ — два корені, при $a \in (\frac{3}{4}; 1) \cup (0; \frac{3}{4})$ — 3 корені, $a = \frac{3}{4}$ — 2 корені, $a = 0$ — 1 корінь, $a < 0$ — немає коренів.

2. *(О.О. Курченко)* Знайдіть площу фігури, утвореної на координатній площині xOy усіма точками $M(x, y)$, координати яких задовольняють нерівність $|x| + |y| + |y-1| \leq 4$.

Неважко побачити, що графік данної фігури є симетричним відносно осі Oy. Побудуємо її для $x \geq 0$. Розглянувши три випадки для змінної y $(y < 0, 0 < y < 1, 1 < y)$ маємо такий малюнок. Площа утвореної фігури рівна $\frac{15}{2}$.



Відповідь: 15.

3. Знайти всі цілі числа n, при яких число $\sqrt{n^2+3n+38}$ також ціле.

Розв'язання 1. Нехай $n^2 + 3n + 38 = m^2$. Тоді $n^2 + 3n + 38 - m^2 = 0$ і $D = 9 - 4(38 - m^2) = d^2, d \in \mathbb{Z}$, адже корені мають бути цілими числами. Звідки $4m^2 - d^2 = 143$. Тобто $(2m + d)(2m - d) = 11 \cdot 13$. Тоді можливі лише такі випадки: $1) 2m + d = \pm 143, 2m - d = \pm 1$; $2) 2m + d = \pm 13, 2m - d = \pm 11; 3) 2m + d = \pm 13, 2m - d = \pm 11; 4) 2m + d = \pm 143, 2m - d = \pm 1$. Звідки $m = \pm 36$ або $m = \pm 6$. Підставляючи в початкове рівняння отримаємо $n \in \{-37, -2, -1, 34\}$.

Розв'язання 2. Нехай $n^2 + 3n + 38 = m^2$. Домножимо обидві частини на 4. $(2n+3)^2 + 143 = (2m)^2$. Звідки $(2n - 2m + 3)(2n + 2m + 3) = 11 \cdot 13$. Далі завершуємо як в першому розв'язанні.

Розв'язання 3. Оскільки $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 38 < n^2 + 4n + 4$ при $n > 34$, і $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 3n + 38 > n^2 + 4n + 4$ при $n < -37$, то при $n \notin [-37; 34]$ шуканий вираз знаходиться між двома послідовними квадратами, а тому не може бути повним квадратом. Залишилося перебрати випадки $n \in [-37; 34]$. Зазначимо, що при $n \vdots 3$ шуканий вираз дає остачу два при діленні на 3, що не можливо для повних квадратів. Якщо n дає остачу 0 або 1 при діленні на 4, то шуканий вираз дає остачу 2 при діленні на 4, що також неможливо. Тому з нашого проміжку $n \in [-37; 34]$ слід виключити числа, що діляться на 3, та дають остачі 0,1 при діленні на 4. Інші числа перевіряємо.

4. *(З матеріалів олімпіад Молдови)* Множина натуральних чисел B називається *хорошою*, якщо не існує елемента $x \in B$, що є дільником суми всіх інших елементів з B. Знайдіть найбільшу кількість елементів в хорошій підмножині множини $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$.

Розв'язання. Зазначимо, що множина B — хороша тоді і лише тоді, коли жоден елемент з B не ділить суму всіх елементів з B. Нехай тепер B — максимальна хороша підмножина в A. Ясно, що $1 \notin B$, тому $B \subseteq \{2, 3, 4, ..., 50\}$. Також $2 + 3 + ... + 50 \vdots 2$, тому $B \neq \{2, 3, ..., 50\}$. З іншої сторони 1274-15 $= 1259$ — просте число, тому множина $\{2, 3, 4, ..., 14, 16, ..., 50\}$ — хороша.

Відповідь: 48 елементів.

5. *(А.В. Анікушин)* Задано функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для якої $\forall n \in \mathbb{N}: \ f(n) > n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1} = f(a_n),\ a_1 \in \mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n \in \mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i \in \{0, 1\}$; 2) для довільного $a_1 \in \mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

Розв'язання. Зафіксуємо функцію f та побудуємо приклад послідовності x_n. Зауважимо, що a_n — монотонно зростаюча послідовність індексів при довільному $a_1 \in \mathbb{N}$.

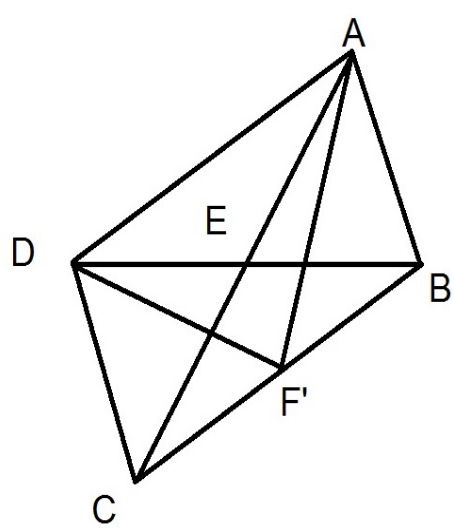
Нехай $a_1 = 1$. Розглянемо відповідну послідовність індексів a_n. Візьмемо три довільні з них та визначимо для них нашу послідовність x_n так, щоб x_{a_n} не була монотонною (наприклад нехай взяли a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, тоді визначимо $x_{a_k} = 0, x_{a_{k+1}} = 1, x_{a_{k+2}} = 0$). Елементи x_n при $n < a_{k+2}$, що не визначені до цього моменту визначаємо довільним чином. Будемо далі брати $a_1 = 2, 3, ...$ і робити те саме. Нехай зараз беремо $a_1 = m$. У послідовності x_n до цього моменту визначена лише скінченна кількість елементів. А оскільки послідовність a_n — нескінченна (бо є строго монотонно зростаючою), то існують індекси a_k, a_{k+1}, a_{k+2} такі, що відповідні елменти $x_{a_k}, x_{a_{k+1}}, x_{a_{k+2}}$ ще не визначені. Визначимо їх $x_{a_k} = 0, x_{a_{k+1}} = 1, x_{a_{k+2}} = 0$. Елементи x_n при $n < a_{k+2}$, що не визначені до цього моменту визначаємо довільним чином.

Продовжимо перебирати $a_1 \in \mathbb{N}$ і тим самим будемо перебирати всі можливі послідовності a_n. Послідовність x_n побудована так, що кожна підпослідовність x_{a_n} містить фрагмент $..., 0, 1, 0, ...$, а тому не є монотонною.

6. *(З матеріалів турецьких олімпіад)* Нехай E — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle EDC = \angle DEC = \angle BAD$. F — точка на відрізку BC така, що $\angle BAF + \angle EBF = \angle BFE$. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABFD$ можна описати коло.

Розв'язання. Помітимо, що при фіксованих A, B, C, D існує єдина точка F, що задовольняє умову задачі. Тому достатньо довести, що точка F' перетину описаного кола трикутника ABD з сегментом CB задовольняє умову для точки F.

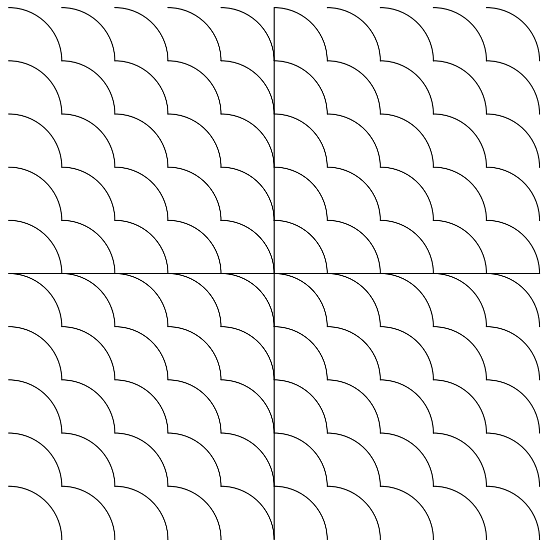
$\angle DBF' = \angle DAF'$. Тоді $\angle DAB = \angle DAF' + \angle F'AB = \angle BAF' + \angle DBF'$. З іншої сторони $\angle DEC = \angle DAB = \angle DF'C$. Тому точки D, E, F', C лежать на одному колі. Отже, $\angle EF'B = \angle EDC = \angle DAB = \angle BAF' + \angle EBF'$.



11 клас

1. *(О.Н. Нестеренко)* Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність $\{x\}^2 + \{y\}^2 = 1$.

Розв'язання. При $x, y \in [0; 1)$ задане рівняння описує чверть одиничного кола з центром в (0,0). Оскільки вираз заданий у задачі не залежить від цілої частини x, y то такий саме малюнок треба намалювати в усіх інших квадратах координатної площини $[n; n+1) \times [m; m+1)$.



На малюнку всі кінц дуг (точки з цілочисельними координатами) мають бути виключені!

2. *(Л.М. Савченко)* Розв'яжіть рівняння

$$\left|x - \frac{5\pi}{12}\right| + \left|x + \frac{\pi}{12}\right| = \arcsin\frac{x^3 - x + 2013}{2013}.$$

Розв'язання. Неважко переконатися, що ліва частина рівняння не менше ніж $\frac{\pi}{2}$, а права частина завжди не більша за $\frac{\pi}{2}$, згідно означення арксинуса. Отже, рівність можлива лише тоді, коли обидві частини рівні $\frac{\pi}{2}$. Для цього необхідно, щоб

$$\frac{x^3 - x + 2013}{2013} = 1 \Rightarrow x \in \{1, 0, -1\}.$$

При $x \in \{0, 1\}$ ліва частина рівна $\frac{\pi}{2}$, а при $x = -1$ — ні.

Відповідь: $x \in \{0, 1\}$.

3. *(З матеріалів олімпіад Молдови)* Додатні дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{y^2 - 3x + 1} = 2\sqrt{1 + z^2}$. Доведіть, що $x^2 + y^2 \geq 2z^2$.

Розв'язання. Згідно нерівності Коші – Буняковського маємо

$$2\sqrt{1 + z^2} = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 1} + 1 \cdot \sqrt{y^2 - 3x + 1} \leq \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + 3x + 1 + y^2 - 3x + 1}.$$

Звідки після піднесення до квадрату отримаємо шукану нерівність.

4. *(З матеріалів олімпіад Молдови)* З множини $\{1, 2, 3, ..., 2013\}$ обираються пари чисел. Кожне число можна використати не більше одного разу, а суми чисел в кожній парі мають бути попарно різні та не перевищувати 2013. Яку максимальну кількість пар можна утворити?

Розв'язання. Припустимо, ми маємо n пар $(x_i, y_i), i = 1..n$. Тоді

$$S = x_1 + y_1 + ... + x_n + y_n \geq 1 + 2 + ... + 2n = n(2n + 1).$$

З іншої сторони всі суми в парах попарно різні і не перевищують 2013, тому

$$S \leq 2013 + 2012 + ... + (2013 - n + 1) = n\frac{2 \cdot 2013 - n + 1}{2}.$$

Звідки

$$n(2n + 1) \leq n\frac{4027 - n}{2} \Rightarrow n \leq 805.$$

Наведемо приклад для $n = 805$. Наприклад пари

$$(1, 1208), (3, 1207), ..., (805, 806), (2, 1610), (4, 1609), ..., (804, 1209)$$

з сумами $1209, 1210, ..., 2013$.

Відповідь: $n = 805$.

5. *(А.В. Анікушин)* Задано функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для якої $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) > n$. Розглянемо послідовність натуральних чисел, що задана рекурентною формулою $a_{n+1} = f(a_n),\ a_1 \in \mathbb{N}$. Чи правда, що для довільної функції f існує послідовність $x_n, n \in \mathbb{N}$ така, що: 1) $x_i \in \{0, 1\}$; 2) для довільного $a_1 \in \mathbb{N}$ послідовність x_{a_n} не є монотонною?

Розв'язання. Див. розв'язок для 10-го класу.

6. *(І. Качан)* Нехай I — центр кола вписаного в нерівносторонній трикутник ABC. Промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Описане коло трикутника CDI вдруге перетинає промінь BI у точці K. Доведіть, що $BK = CK$.

Розв'язання. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. Нехай $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$. Проведемо пряму через точки D і O. Нехай L — точка перетину прямої DO і BI. Оскільки AI — бісектриса кута BAC, то $\smile BD = \smile CD$, то пряма DO є серединним перпендикуляром до BC. Тому $BL = CL$, а отже трикутник BLC — рівнобедрений і $\angle LBC = \angle LCB = \beta/2$. Далі

$$\angle ILC = \angle BLC = 180^\circ - (\angle LBC + \angle LCB) = 180^\circ - \beta.$$

З іншої сторони

$$\angle CDI = \angle CDA = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ACD) =$$

$$= 180^\circ - (0.5\alpha + \gamma + 0.5\alpha) = 180 - \alpha - \gamma = \beta.$$

Таким чином $\angle ILC + \angle CDI = 180^\circ$. Звідси маємо, що точки I, D, C, L — лежать на одному колі, що проходить через I, D, C. Тому K і L співпадають. Отже, CK=CL=BL=BK.