Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

Лекція 3

Раціональні вирази. Дії з раціональними дробами. Раціональні рівняння. Раціональні рівняння з параметрами.

<u>Означення</u>:<u>Цілими виразами</u> називають вирази, де змінна міститься лише в чисельнику.

Наприклад, $x-y$; $\frac{a+b}{2}$; m^2+2m+n^2; $\frac{1}{3}x-4$; x^n-y^n; $\frac{c}{4}+\frac{d}{7}$; y; 7.

<u>Означення</u>:<u>Дробовими виразами</u> називаються такі, що містять дію ділення на вираз зі змінними.

Наприклад, $2x+\frac{a}{b}$; $(x-y):(x+y)$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; $\frac{4}{x}$.

<u>Означення</u>: Об'єднання множин цілих і дробових виразів є множина <u>раціональних виразів.</u>

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте **ця заміна можлива лише тоді, коли вона не призводить до ділення на нуль.**

Наприклад, вираз $2+\frac{a+2}{a-1}$ при $a=1$ не має змісту, тобто числового значення такого виразу не існує. При всіх інших значеннях a цей вираз має зміст.

<u>Означення</u>: <u>Областю визначення</u> виразу з однією змінною називають множину значень змінної,при яких цей вираз має зміст. Елементи цієї множини називають <u>допустимими значеннями змінної</u>.

<u>Означення</u>: Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають <u>тотожно рівними.</u>

<u>Означення</u>: Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають <u>тотожністю</u>.

Наприклад, рівність $\frac{a-2}{a-2}=1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях a, тобто при всіх a, крім $a=2$.

<u>Основна властивість дробу</u>: Якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий многочлен, який тотожно не дорівнює нулю, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},$$

де A,B,C – многочлени, причому многочлени B і C тотожно не дорівнюють нулю.

Скороченням дробу на множник C називають обернене тотожне перетворення, коли вираз $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний дріб $\frac{A}{B}$.

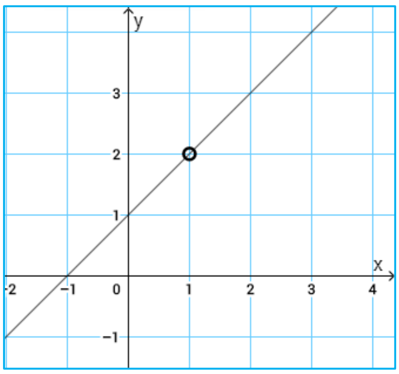
Приклад1: Відомо, що $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=2$. Знайдіть значення дробу $\dfrac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}$.

Розв'язання. Якщо $b=0$, то $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=\dfrac{3a}{2a}=\dfrac{3}{2}$, що суперечить умові. Отже, $b\neq 0$. Поділимо чисельник і знаменник дробу, значення якого ми шукаємо, на b^3 :

$$\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}=\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3-6\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\dfrac{a}{b}+12}{18+\left(\dfrac{a}{b}\right)^3-6\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}.$$

З умови $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=2$ випливає, що $3a+4b=4a-2b\Rightarrow a=6b\Rightarrow\dfrac{a}{b}=6$. Тоді шукане значення дорівнює $\dfrac{6^3-6\cdot6^2-6+12}{18+6^3-6\cdot6^2}=\dfrac{1}{3}$.

Приклад 2:Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.



Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина $D(y)=\{x\,|\,x\neq 1\}$. Маємо $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$. Отже, шуканим графіком є пряма $y=x+1$ за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1.

Приклад 3: Для кожного значення a розв'яжіть рівняння $(a^2-9)x=a+3$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(a+3)(a-3)x=a+3$ і розглянемо три випадки.

1) $a=3$.

Тоді отримуємо рівняння $0x=6$, яке не має коренів.

2) $a=-3$.

У цьому випадку отримуєморівняння $0x=0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a\neq 3$ і $a\neq -3$.

Тоді $x=\dfrac{a+3}{(a-3)(a+3)}=\dfrac{1}{a-3}$.

Відповідь: якщо $a=3$, то рівняння не має коренів; якщо $a=-3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a\neq 3$ і $a\neq -3$, то $x=\dfrac{1}{a-3}$.

Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

Дії з раціональними дробами

1° Щоб **додати раціональні дроби з однаковими знаменниками**, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

2° Щоб **відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками**, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

3° Щоб **додати(відняти) дроби з різними знаменниками**, треба звести дроби до спільного знаменника(використайте для цього основну властивість дробу) і виконати дії вже для дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}\ ;\qquad \frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}-\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D-C\cdot B}{B\cdot D}$$

4° **Добутком двох раціональних дробів** є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник – добутку їх знаменників.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

5° **Часткою двох раціональних дробів** є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого і знаменника дільника, а знаменник – добутку знаменника діленого і чисельника дільника.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

<u>Приклад 4</u>: Спростити вирази:

1) $\left(\frac{1}{n-8}-\frac{n}{n^2-64}\right):\frac{8n}{n^2-16n+64}-\frac{2}{n+8}$;

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)$;

3) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a+2}-\frac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\frac{a^2-4}{4}$;

4) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$;

5) $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^n-b^n}:\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)$.

Розв'язання:

1) Пронумеруємо арифметичні дії у виразі $\left(\frac{1}{n-8}\overset{(1)}{-}\frac{n}{n^2-64}\right)\overset{(2)}{:}\frac{8n}{n^2-16n+64}\overset{(3)}{-}\frac{2}{n+8}$ і послідовно виконаємо їх.

(1) $\frac{1}{n-8}-\frac{n}{n^2-64}=\frac{1}{n-8}-\frac{n}{(n-8)(n+8)}$.

Помножимо чисельник і знаменник першого виразу на $(n+8)$, отримаємо:

$$\frac{n+8}{(n-8)(n+8)}-\frac{n}{(n-8)(n+8)}=\frac{n+8-n}{(n-8)(n+8)}=\frac{8}{(n-8)(n+8)}.$$

$$(2)\ \frac{8}{(n-8)(n+8)}:\frac{8n}{n^2-16n+64}=\frac{8}{(n-8)(n+8)}:\frac{8n}{(n-8)^2}=\frac{8\cdot(n-8)^2}{(n-8)(n+8)\cdot 8n}=$$

$$=\frac{n-8}{n(n+8)}.$$

$$(3)\ \frac{n-8}{n(n+8)}-\frac{2}{n+8}.$$

Помножимо чисельник і знаменник другого виразу на n, отримаємо:

$$\frac{n-8}{n(n+8)}-\frac{2n}{n(n+8)}=\frac{n-8-2n}{n(n+8)}=\frac{-n-8}{n(n+8)}=\frac{-(n+8)}{n(n+8)}=-\frac{1}{n}.$$

2) Пронумеруємо арифметичні дії у виразі $\frac{3}{2a-3}\overset{(3)}{-}\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\overset{(2)}{\cdot}\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}\overset{(1)}{-}\frac{3}{4a^2-9}\right)$ і послідовно виконаємо їх.

$$(1)\ \frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}=\frac{2a}{(2a-3)^2}^{\times(2a+3)}-\frac{3}{(2a-3)(2a+3)}^{\times(2a-3)}=$$

$$=\frac{2a(2a+3)}{(2a-3)^2(2a+3)}-\frac{3(2a-3)}{(2a-3)^2(2a+3)}=\frac{4a^2+6a}{(2a-3)^2(2a+3)}-\frac{6a-9}{(2a-3)^2(2a+3)}=$$

$$=\frac{4a^2+6a-6a+9}{(2a-3)^2(2a+3)}=\frac{4a^2+9}{(2a-3)^2(2a+3)}.$$

$$(2)\ \frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\frac{4a^2+9}{(2a-3)^2(2a+3)}=\frac{2a\left(4a^2-9\right)\cdot\left(4a^2+9\right)}{\left(4a^2+9\right)\cdot(2a-3)^2(2a+3)}=$$

$$=\frac{2a(2a-3)(2a+3)}{(2a-3)^2(2a+3)}=\frac{2a}{2a-3}.$$

$$(3)\ \frac{3}{2a-3}-\frac{2a}{2a-3}=\frac{3-2a}{2a-3}=-\frac{2a-3}{2a-3}=-1.$$

3) Пронумеруємо арифметичні дії у виразі $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4}\overset{(1)}{+}\frac{1}{a+2}\overset{(2)}{-}\frac{4a-28}{a^3+8}\right)\overset{(3)}{\cdot}\frac{a^2-4}{4}$ і послідовно виконаємо їх.

$(1),(2)$

$$\frac{3a-8}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a+2}-\frac{4a-28}{a^3+8}=\frac{3a-8}{a^2-2a+4}^{\times(a+2)}+\frac{1}{a+2}^{\times\left(a^2-2a+4\right)}-\frac{4a-28}{(a+2)\left(a^2-2a+4\right)}=$$

$$=\frac{(3a-8)(a+2)}{(a^2-2a+4)(a+2)}+\frac{a^2-2a+4}{(a+2)(a^2-2a+4)}-\frac{4a-28}{(a+2)(a^2-2a+4)}=$$

$$=\frac{\underline{3a^2}-\underline{\underline{8a}}+\underline{\underline{6a}}-16+\underline{a^2}-\underline{\underline{2a}}+4-\underline{\underline{4a}}+28}{(a+2)(a^2-2a+4)}=\frac{4a^2-8a+16}{(a+2)(a^2-2a+4)}=$$

$$=\frac{4(a^2-2a+4)}{(a+2)(a^2-2a+4)}=\frac{4}{a+2}.$$

(3) $\frac{4}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{4}=\frac{4(a-2)(a+2)}{4(a+2)}=a-2$.

4) Пронумеруємо арифметичні дії у виразі $\left(\frac{x}{y}\overset{(1)}{-}\frac{y}{x}\right)\overset{(4)}{:}\left(\frac{x}{y}\overset{(2)}{+}\frac{y}{x}\overset{(3)}{-}2\right)$ і послідовно виконаємо їх.

(1) $\frac{x}{y}^{\times(x)}-\frac{y}{x}^{\times(y)}=\frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}=\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{xy}$.

(2),(3) $\frac{x}{y}^{\times(x)}+\frac{y}{x}^{\times(y)}-2^{\times(xy)}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}-\frac{2xy}{xy}=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$.

(4) $\frac{(x-y)(x+y)}{xy}:\frac{(x-y)^2}{xy}=\frac{(x-y)(x+y)\cdot xy}{xy\cdot(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}$.

5) Пронумеруємо арифметичні дії у виразі $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^n-b^n}\overset{(2)}{:}\left(\frac{1}{a^n}\overset{(1)}{+}\frac{1}{b^n}\right)$ і послідовно виконаємо їх.

(1) $\frac{1}{a^n}^{\times(b^n)}+\frac{1}{b^n}^{\times(a^n)}=\frac{b^n}{a^nb^n}+\frac{a^n}{a^nb^n}=\frac{b^n+a^n}{a^nb^n}$.

(2) $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^n-b^n}:\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}=\frac{(a^n-b^n)(a^n+b^n)\cdot a^nb^n}{(a^n-b^n)\cdot(a^n+b^n)}=a^nb^n$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{n}$; 2) -1; 3) $a-2$; 4) $\frac{x+y}{x-y}$; 5) a^nb^n.

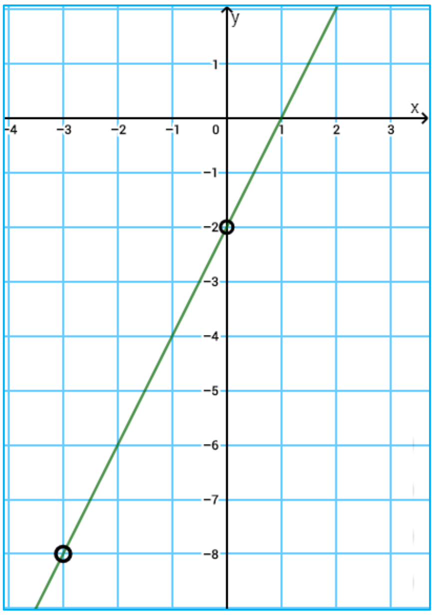
<u>Приклад 5</u>: Побудувати графіки:

1) $y=\frac{x^2+6x+9}{x+3}-\frac{5x-x^2}{x}$; 2) $y=\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$.

Розв'язання:

1) Функція y складається з двох раціональних дробів $\frac{x^2+6x+9}{x+3}$ і $\frac{5x-x^2}{x}$, перший з яких не має змісту при $x=-3$, а другий – при $x=0$. Запишемо область допустимих значень змінної x:

$$D(y)=\{x\,|\,x\neq-3\ \ i\ \ x\neq0\}.$$



Маємо,

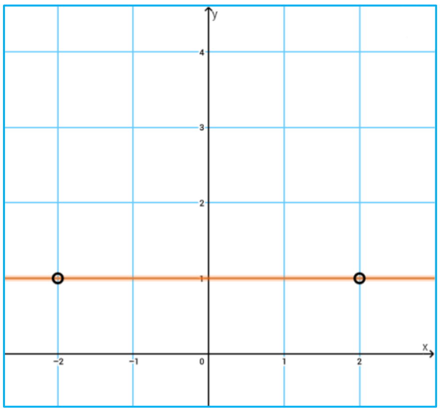
$$y=\frac{x^2+6x+9}{x+3}-\frac{5x-x^2}{x}=\frac{(x+3)^2}{x+3}-\frac{x(5-x)}{x}=$$
$$=x+3-5+x=2x-2.$$

Отже, шуканим графіком є пряма $y=2x-2$ за винятком двох точок, абсциси яких дорівнюють відповідно -3 і 0.

2) Функція складається з трьох дробів $\frac{x^2}{x^2-4}, \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x+2}$, перший з яких не має змісту при $x=\pm 2$, другий – при $x=2$, третій – при $x=-2$.

Запишемо область допустимих значень змінної x:

$$D(y)=\{x \mid x\neq \pm 2\}.$$



Маємо, $y=\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}^{\times(x+2)}+\frac{1}{x+2}^{\times(x-2)}=$

$$=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{x^2-x-2+x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-4}{(x-2)(x+2)}=1$$

Отже, шуканим графіком є паралельна осі Ox пряма $y=1$ за винятком двох точок, абсциси яких дорівнюють відповідно -2 і 2.

Раціональні рівняння

Нехай задано функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ та поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функції f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x)=g(x)$.

<u>Означення</u>: <u>Областю визначення рівняння</u> $f(x)=g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x)=g(x)$ є множина $D(f)\cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння $ax=b$ є множина всіх чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $\{x \mid x\neq 2\}$;
- областю визначення рівняння $\frac{x+3}{|x|-x}=0$ є множина $\{x \mid x<0\}$;

Не зважаючи на те, що рівняння $x^2=-2$ не має коренів, його областю визначення є множина всіх чисел.

Отже, для того, щоб значення змінної було коренем рівняння $f(x)=g(x)$, необхідно виконання умови $x \in D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо рівняння $x^2=9$ і $|x|=3$. Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -3 і 3.

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2=9$ і $|x|=3$ **рівносильні**.

Означення: Рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ і $f_2(x)=g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні.

Теорема 1: ***Якщо до обох частин даного рівняння додати(або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 2: ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому знак на протилежний, то отримаємо рівняння,рівносильне даному.***

Теорема 3: ***Якщо обидві частини рівняння помножити(поділити)на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Наприклад, розв'яжемо рівняння $x-2=\frac{x}{2}-1$.

За теоремою 1 додамо до обох частин рівняння число 2, отримаємо рівносильне рівняння $x=\frac{x}{2}+1$.

За теоремою 2 перенесемо доданок $\frac{x}{2}$ в іншу сторону з протилежним знаком. Отримаємо рівносильне даному рівняння $x-\frac{x}{2}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}=1$.

За теоремою 3 помножимо обидві частини рівняння на 2,отримаємо рівносильне даному рівняння $x=2$.

Означення: Якщо множина коренів рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, то рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x)=g_1(x)$.

Наприклад, рівняння $x^2=25$ (2) є наслідком рівняння $\frac{1}{x-5}+x^2=25+\frac{1}{x-5}$ (1) ,оскільки коренями рівняння (2) є $x=-5$ і $x=5$, а коренями рівняння (1) є лише $x=-5$.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями заданого рівняння називають сторонніми коренями заданого рівняння.

Означення: Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.

Рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$

З властивостей дробів ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельний дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.* Тому є вірним наступне.

Рівняння $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ **рівносильне системі** $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$**.**

<u>Приклад 6</u>: Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$

Розв'язання: Областю визначення рівняння $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $\{x \mid x\neq -2\}$ оскільки при $x=-2$ знаменник у лівій частині рівняння буде рівний нулю.

Прирівнявши чисельник до нуля, отримаємо $x^2-4=0$(рівняння-наслідок) , коренями якого є -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, тобто є стороннім коренем. Отже, число 2 є єдиним коренем даного рівняння.

<u>Приклад 7</u>: Розв'язати рівняння 1) $\dfrac{9x-7}{3x-2}-\dfrac{4x-5}{2x-3}=1$; 2) $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{4}{1-4x^2}$.

Розв'язання:

1) Віднімемо 1 від обох частин рівняння і запишемо ліву частину у вигляді дробу. Маємо:

$$\frac{9x-7}{3x-2}^{\times(2x-3)}-\frac{4x-5}{2x-3}^{\times(3x-2)}-1^{\times(2x-3)(3x-2)}=0;$$

$$\frac{(9x-7)(2x-3)}{(3x-2)(2x-3)}-\frac{(4x-5)(3x-2)}{(2x-3)(3x-2)}-\frac{(2x-3)(3x-2)}{(2x-3)(3x-2)}=0$$

$$\frac{\underline{\underline{\underline{18x^2}}}-\underline{14x}-\underline{27x}+21-\underline{\underline{\underline{12x^2}}}+\underline{15x}+\underline{8x}-10-\underline{\underline{\underline{6x^2}}}+\underline{9x}+\underline{4x}-6}{(2x-3)(3x-2)}=0$$

$$\frac{-5x+5}{(2x-3)(3x-2)}=0$$

Отримане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} -5x+5=0 \\ 2x-3\neq 0 \\ 3x-2\neq 0 \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x=1 \\ x\neq \dfrac{3}{2} \\ x\neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Отже, дане рівняння має один корінь $x=1$.

2) Маємо:

$$\frac{2x-1}{2x+1}^{\times(2x-1)} - \frac{2x+1}{2x-1}^{\times(2x+1)} - \frac{4}{(1-2x)(1+2x)}^{\times(-1)} = 0$$

$$\frac{(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{(2x+1)^2}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{4}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{-8x+4}{(2x+1)(2x-1)} = 0$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} -8x+4=0 \\ 2x+1\neq 0 \\ 2x-1\neq 0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x=0,5 \\ x\neq -0,5 \\ x\neq 0,5 \end{cases}$$

Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь: 1) $x=1$; 2) коренів немає.

Рівняння виду $f(x)\cdot g(x)=0$

Відомо, що *добуток двох чисел дорівнює нулю, якщо хоча бодне з них дорівнює нулю.* Тому є вірним наступне.

Рівняння $f(x)\cdot g(x)=0$ **є рівносильним сукупності** $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ **.**

<u>**Приклад 8**</u>**:** Розв'язати рівняння $(x^2-1)(x^2-2x+1)=0$

Розв'язання:

Дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+1)=0 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right.$$

Перше рівняння в свою чергу рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

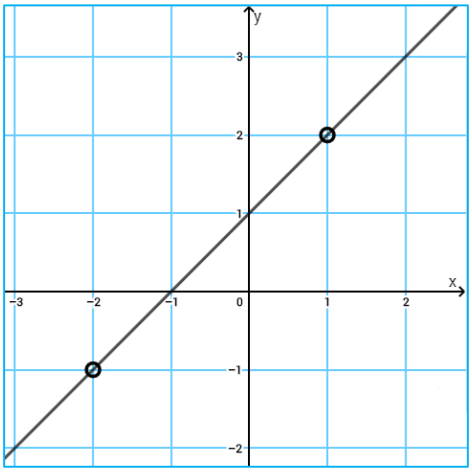
Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Таким чином, початкове рівняння має два корені $x=-1$ і $x=1$.

Приклад 9: Побудуйте графіки рівняння: 1) $\frac{x-y+1}{(x-1)(x+2)}=0$; 2) $(x-y)\left(x^2+y^2+2xy-4\right)=0$

Розв'язання:



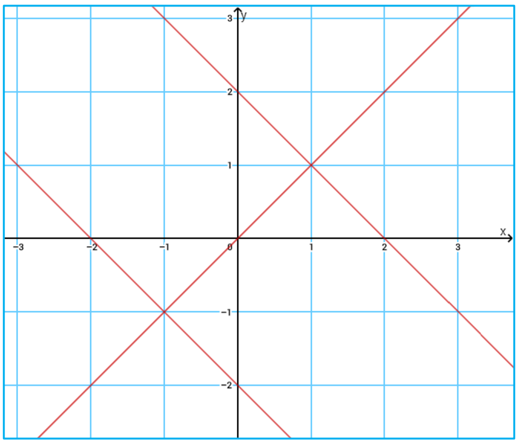
1) Рівняння має вигляд $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, отже рівносильне системі

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x-1)(x+2)\neq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її, отримаємо

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

Отже, графіком заданого рівняння буде пряма $y=x+1$ за винятком двох точок, абсциси яких відповідно рівні -2 і 1.



2) Рівняння має вигляд $f(x)\cdot g(x)=0$, отже рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2+y^2+2xy-4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ (x+y)^2-4=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=x \\ (x+y-2)(x+y+2)=0 \end{array}\right.$$

Друге рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=-x-2 \end{array}\right.$$

Отже

$$\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x+2 \\ y=-x-2 \end{array}\right.$$

Таким чином, графіком заданого рівняння буде три прямі $y=x, y=-x+2, y=-x-2$

Приклад 10: При кожному значенні параметра a розв'язати рівняння:

1) $\frac{x-a}{(x+1)(x+2)}=0$; 2) $\frac{x-6}{x+2a}=0$.

Розв'язання:

1) Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x-a=0 \\ x-1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}$$

Якщо $a=1$, то отримуємо $\begin{cases} x-1=0 \\ x-1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}$, і така система розв'язків не має,

Можна перевірити підставивши значення $a=1$ прямо в рівняння, тоді $\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=0 \Rightarrow \frac{1}{x+2}=0$ і таке рівняння дійсно не має коренів.

Якщо $a=-2$, то отримуємо $\begin{cases} x+2=0 \\ x-1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}$, і така система також не має розв'язків.

Якщо $a\neq 1$ і $a\neq -2$, тоді маємо систему $\begin{cases} x=a \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases}$, яка має один корінь $x=a$.

Відповідь: якщо $a=-2$ або $a=1$, то рівняння розв'язків немає, якщо $a\neq 1$ і $a\neq -2$, то $x=a$.

2) Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x-6=0 \\ x+2a\neq 0 \end{cases}$$

Якщо $2a=-6$, тобто $a=-3$, то отримуємо $\begin{cases} x-6=0 \\ x-6\neq 0 \end{cases}$, така система не має розв'язків.

Інакше, при $a\neq -3$, отримуємо $\begin{cases} x=6 \\ x\neq 2a \end{cases}$, і така система має розв'язок $x=6$.

Відповідь: якщо $a=-3$, то рівняння розв'язків не має; якщо $a\neq -3$, то $x=6$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Спростити вираз:

   1) $\left(\frac{b^3}{b^2-8b+16}-\frac{b^2}{b-4}\right):\left(\frac{b^2}{b^2-16}-\frac{b}{b-4}\right)$;

   2) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}$;

   3) $\frac{1}{3b-1}-\frac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{9b^2-6b+1}-\frac{1}{9b^2-1}\right)$;

   4) $\left(\frac{x}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+8}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{2}{2-x}\right)$.

2. Побудувати графік:

   1) $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x-x^2}{x}$;

   2) $y=\frac{24-2x}{x^2-16}-\frac{x}{2x-8}+\frac{4}{x+4}$.

3. Розв'язати рівняння:

   1) $\frac{2x-9}{2x-5}+\frac{3x}{3x-2}=2$;

   2) $\frac{5x^2+8}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$.

4. Побудувати графік:

   1) $\frac{3-y+x}{(x-2)(x+1)}=0$;

   2) $(2+y-x)(4x^2-y^2)=0$.

5. При кожному значенні параметра a розв'язати рівняння: $\frac{x+2a}{(x+1)(x-3)}=0$