

Лекція 5

Подільність чисел.

Подільність націло. Ознаки подільності.

**Означення:** Говорять, що ціле число  $a$  ділиться на ціле число  $b$  ( $b \neq 0$ ), якщо існує число  $k$  таке, що  $a = kb$ .

При цьому  $a$  – кратне  $b$ ,  $b$  – дільник  $a$ , а  $k$  – частка.

**Основні властивості подільності:**

- 1) Якщо  $a \neq 0$ , то  $a : a$  ;
- 2) Якщо  $a \neq 0$ , то  $0 : a$  ;
- 3) Якщо  $a : b$ , то  $ka : b, k \in Z$  ;
- 4) Якщо  $a : b$  і  $b : c$ , то  $a : c$  ;
- 5) Якщо  $a : m$  і  $b : n$ , то  $ab : mn$  ;
- 6) Якщо  $a : c$  і  $b : c$ , то  $(a \pm b) : c$  ;

Доведення 6):  $a : c \rightarrow a = kc, b : c \rightarrow b = mc \rightarrow (a \pm b) = (k \pm m)c$  .

Приклад 1:  $n : 5$ . Довести, що  $(n^2 + 15n) : 25$ .

◀  $n : 5 \rightarrow n = 5k; n^2 + 15n = 25k^2 + 75k = 25(k^2 + 3k) = 25k_1$  ▶

Приклад 2:  $c : 4, d : 4$ . Довести, що  $6c + 4d : 24$ .

◀  $c : 4 \rightarrow c = 4k_1 \rightarrow 6c = 24k_1; d : 6 \rightarrow d = 6k_2 \rightarrow 4d = 24k_2$  . Додаємо вирази  $6c + 4d = 24(k_1 + k_2) = 24k$  ▶

Приклад 3:  $a : c, a + b : c$ . Довести, що  $b : c$ .

◀  $a : c \rightarrow a = k_1c; a + b : c \rightarrow a + b = k_2c$  . Віднімаємо вирази  $b = (k_2 - k_1)c = kc$  ▶

Приклад 4:  $a$  і  $b$  цілі числа такі, що  $(a + 3) : 13, (b + 29) : 13$ . Довести, що  $a - b : 13$ .

◀  $(a + 3) : 13 \rightarrow a + 3 = 13k_1 \rightarrow a = 13k_1 - 3; (b + 29) : 13 \rightarrow b + 29 = 13k_2 \rightarrow b = 13k_2 - 29$  . Віднімаємо вирази  $a - b = 13(k_1 - k_2) + 26 = 13k$  ▶

Приклад 5: Довести, що  $(\overline{ab} + \overline{ba}) : 11$

◀  $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b) : 11$  ▶

Приклад 6: Знайти всі пари цілих чисел, що задовольняють рівняння:  
 $3x^2 - 4xy + y^2 = 3$ .

## Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

$\leftarrow 3x^2 - 4xy + y^2 = 3x^2 - 3xy - xy + y^2 = 3x(x - y) - y(x - y) = (x - y)(3x - y) = 3$ . Оскільки  $x$  і  $y$  – цілі, то і вирази  $(x - y)$  і  $(3x - y)$  – цілі і є дільниками числа 3. Маємо можливі варіанти значень цих виразів:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 0; \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = -4;$$
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - y = -3 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = 0; \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 4.$$

Відповідь: (1; 0); (-1; -4); (-1; 0); (1; 4) ➤

### Ділення з остачею.

#### Теорема про ділення з остачею:

Для будь-якого цілого числа  $a$  і натурального числа  $b$  існує єдина пара цілих чисел  $p$  і  $r$  таких, що  $a = bq + r$  ( $0 \leq r < b$ ). Тут  $r$  – остача,  $b$  – неповна частка, якщо  $r \neq 0$ .

! Якщо цілі числа  $a$  і  $b$  при діленні на натуральне число  $n$  дають однакові остачі, то  $(a - b) : n$ .

! Якщо цілі числа  $a$  і  $b$  такі, що  $(a - b) : n$ , то числа  $a$  і  $b$  дають однакові остачі при діленні на  $n$ .

! Якщо цілі числа  $a$  і  $b$  при діленні на натуральне число  $m$ , то кажуть, що вони рівні по модулю  $m$ . Позначається  $a \equiv b \pmod{m}$ .

Приклад:  $7 \equiv 2 \pmod{5}$ ;  $-1 \equiv 6 \pmod{7}$ ;  $15 \equiv 0 \pmod{3}$ .

#### Властивості:

1.  $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$ ;
2.  $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ ;
3.  $a \equiv b \pmod{m}$  і  $c \equiv d \pmod{m} \rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$ ;
4.  $a \equiv b \pmod{m}$  і  $c \equiv d \pmod{m} \rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$ ;
5.  $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$ .

Приклад 7: Довести, що при будь-якому натуральному  $n$   
 $17^n + 25 \cdot 4^n : 13$ .

$\leftarrow 17 \equiv 4 \pmod{13} \rightarrow 17^n \equiv 4^n \pmod{13} \rightarrow 17^n + 25 \cdot 4^n \equiv 4^n + 25 \cdot 4^n = 26 \cdot 4^n \equiv 0 \pmod{13} \rightarrow$

Приклад 8: Знайти остачу від ділення числа  $5^{101}$  на 7.

## Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

◀  $5 \equiv 5 \pmod{7}$ ;  $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$ ;  $5^3 \equiv 6 \pmod{7}$ ;  $5^4 \equiv 2 \pmod{7}$ ;  
 $5^5 \equiv 3 \pmod{7}$ ;  $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ;  $\rightarrow 5^{96} \equiv 1 \pmod{7}$ ;  $\rightarrow 5^{101} \equiv 3 \pmod{7}$ ;  
Остача від ділення дорівнює 3. ▶

Приклад 9: Знайти остачу від ділення числа  $5^{101} + 2^{90}$  на 7.

◀  $2 \equiv 2 \pmod{7}$ ;  $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$ ;  $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow 2^{90} \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow$   
 $\rightarrow 5^{101} + 2^{90} \equiv 3 + 1 = 4 \pmod{7}$ ;  
Остача від ділення дорівнює 4. ▶

! Якщо число  $a$  – парне, то  $a = 2k$ ;  $b$  – непарне, то  $b = 2k + 1$  або  $b = 2k - 1$ .

Приклад 10: Довести, що при будь-якому натуральному  $n$  число  $(n^2 - n)(n^2 + 2n) : 24$ .

◀  $(n^2 - 1)(n^2 + 2n) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$  – чотири послідовні натуральні числа : із них одне кратне 2, одне кратне 4 і хоча б одне кратне 3, отже число кратне і числу  $2 \times 4 \times 3 = 24$  ▶

### Ознаки подільності.

1. Число ділиться на 2, якщо остання цифра цього числа парна.
2. Число ділиться на 3, якщо сума цифр цього числа ділиться на 3.
3. Число ділиться на 4, якщо число із двох останніх цифр ділиться на 4.
4. Число ділиться на 5, якщо воно закінчується на 5 або 0.
5. Число ділиться на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3.
6. Число ділиться на 8, якщо число із трьох останніх цифр ділиться на 8.
7. Число ділиться на 9, якщо сума цифр цього числа ділиться на 9.
8. Число ділиться на 10, якщо воно закінчується на 0.
9. Число  $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$  ділиться на 11, якщо  $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots = 0$ .

**Означення:** Число називається **простим**, якщо воно ділиться тільки на себе і на 1.

В іншому випадку число називається **складеним**.

Приклад 11: До числа 15 зліва і справа допишіть дві цифри так, щоб отримане число ділилося на 15.

◀ Запишемо шукане число у вигляді  $\overline{a15b}$ . Оскільки  $15 = 5 \times 3$ , то шукане число має ділитися на 5 і на 3. Отже, за ознакою подільності на 5, остання цифра має дорівнювати або  $b = 0$  або  $b = 5$ . У першому випадку число  $\overline{a150}$  має ділитися на 3, отже сума  $a + 1 + 5 + 0$  має ділитися на 3. Звідси отримуємо можливі значення цифри  $a$ : 3, 6 або 9, отримуємо числа: 3150, 6150

## Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

і 9150. Для другого значення останньої цифри отримуємо число  $\overline{a155}$ , яке має ділитися на 3, а значить сума  $a + 1 + 5 + 5$  теж має ділитися на 3. Можливі значення цифри  $a$  у цьому випадку: 1, 4 і 7. Отримуємо числа: 1155, 4155, 7155. Відповідь: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155, 7155. ➤

Приклад 12: Замініть зірочки на цифри так, щоб число  $283*64*$  ділилось на 44.

◀ Запишемо шукане число у вигляді  $\overline{283a64b}$ . Оскільки  $44 = 4 \times 11$ , то шукане число має ділитися на 4 і на 11. За ознакою подільності на 4 число  $\overline{4b}$  має ділитися на 4, що можливо при  $b = 0, b = 4, b = 8$ . При  $b = 0$  число  $\overline{283a640}$  має ділитися на 11, тобто сума  $0 - 4 + 6 - a + 3 - 8 + 2 = -1 - a = 0$ . Отже  $a = -1$ , що неможливо. При  $b = 4$  число  $\overline{283a644}$  має ділитися на 11, тобто сума  $4 - 4 + 6 - a + 3 - 8 + 2 = 3 - a = 0$ . Отже  $a = 3$ . Отримуємо перше число 2833644. При  $b = 8$  число  $\overline{283a648}$  має ділитися на 11, тобто сума  $8 - 4 + 6 - a + 3 - 8 + 2 = 7 - a = 0$ . Отже  $a = 7$ . Друге число 2837648.

Відповідь: 2833644, 2837648. ➤

### ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ:

- Числа  $a$  і  $b$  такі, що  $a : 7, b : 3$ . Доведіть, що  $(6a - 14b) : 42$ .
- Доведіть, що а)  $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : 111$ ; б)  $(\overline{abc} - \overline{cba}) : 99$ .
- Чи існує таке трицифрове число  $\overline{abc}$ , що значення виразу  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$  є квадратом натурального числа.
- Розв'яжіть у цілих числах рівняння: а)  $3x^2 - 2xy - y^2 = -5$ ;  
б)  $9x^2 - y^2 = 11$ .
- Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні  $n$  значення виразу:  
А)  $7^n + 11 \cdot 13^n$  ділиться на 6; Б)  $3^{3n} + 2^{n+3} + 6 \cdot 2^n$  ділиться на 5.
- Знайдіть остачу від ділення числа: а)  $3^{101}$  на 7; б)  $3^{70} + 2^{52}$  на 5.
- Знайти останню цифру числа  $13^{52}$ .
- До числа 7392 справа допишіть цифру, щоб отримане число ділилось на 8.
- Замініть зірочки на цифри так, щоб число  $42*4*$  ділилось націло на 36.
- Замініть зірочки на цифри так, щоб число  $283*64*$  ділилось націло на 99.
- Знайти всі цілі числа  $n$  такі, щоб число  $|n^2 - 9|$  було простим.