Функція

Функція – одне з найважливіших понять математики вона дає можливість досліджувати і моделювати не тільки стани, а й процеси. Дослідження процесів і явищ за допомогою функцій – один з основних методів сучасної науки.

Площа квадрата залежить від довжини його сторони. Кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає єдине значення його площі.

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення виразу $2x - 1$. Прикладів залежностей і відповідностей можна навести багато. Для науки і практики важливо вміти досліджувати такі відповідності. Їх називають функціональними відповідностями або функціями.

У розглянутих прикладах ідеться про зв'язок між двома змінними. Одну з них, значення якої вибирають довільно, називають незалежною змінною, або аргументом. Другу змінну яка залежить від аргументу, називають залежною змінною, або функцією.

Якщо кожному значенню змінної x деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то змінну y називають функцією від x.

За таких умов змінну x називають аргументом функції y**,** множину D – областю визначення функції, а відповідність між x і y – функцією.

Розрізняють чотири способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний і словесний.

1. Табличний спосіб задання функції дуже зручний, коли область визначення функції складається з нескінченного числа точок. Функцію задано таблично, коли в одному рядку (або стовпчику) записані всі значення аргументу, а в другому відповідні значення функції.

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2		x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2		y_n

Приклади таких таблиць: таблиця квадратів чисел, таблиця кубів чисел, таблиця основних тригонометричних функцій

Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших пяти натуральних значень х можна задати у вигляді такої таблиці.

x	1	2	3	4	5

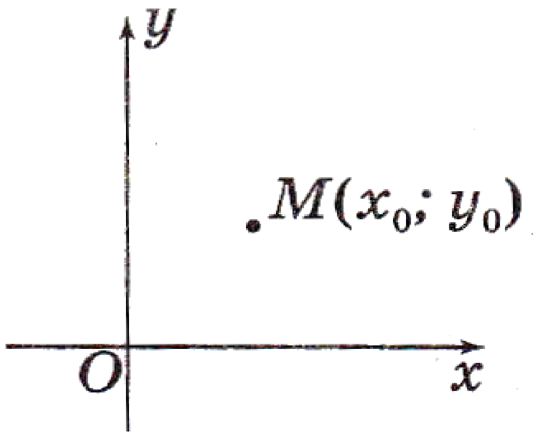
y	1	3	5	7	9

- Область визначення даної функції: 1, 2, 3, 4, 5.
- Область значень даної функції: 1, 3, 5,7, 9.

Табличний спосіб задання функції незручний тільки тим, що таблиця займає багато місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

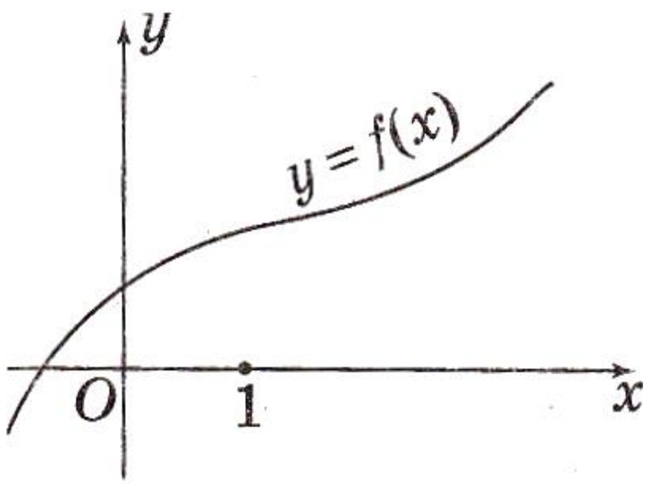
2. Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що подається графік цієї функції.

Для використання графіків функції використовують прямокутну систему координат xOy. Це сукупність двох взаємно перпендикулярних числових осей зі спільним початком.



Одну з осей – горизонтальну – називають віссю абсцис, або віссю іксів, або віссю Ox. Другу, вертикальну вісь, називають ординатою або віссю ігриків, або віссю Oy.

Числа, що позначають положення точки на координатній площині xOy, називають координатами точки.



Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy, абсцисами яких є значення аргументу x, а ордината – відповідні значеня $y = f(x)$.

3. Аналітичний спосіб задання функції полягає в тому, що y виражають через x за допомогою формули або аналітичного виразу. Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість

знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задано формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ – множина всіх чисел, а функції $y = \frac{x-3}{2x-6}$ – множина всіх чисел, крім 2, оскільки тоді знаменник перетвориться в нуль, а на нуль ділити не можна.

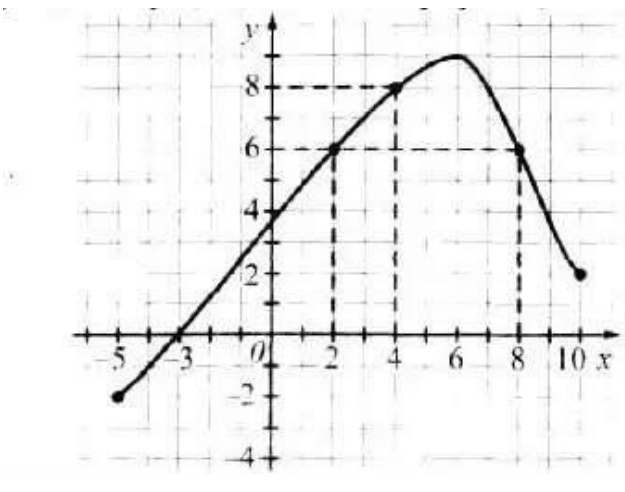
4. Словесне задання функції полягає в тому, що відповідність між x та y виражається словами. До словесного способу задання функції належить і такий, коли функція задається за допомогою кількох формул, кожна з яких діє при певних значеннях аргументу, що доводиться визначати словами.

Наприклад, $y = \begin{cases} 4x - 3, \text{якщо } x < 0; \\ -2x, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$

Розглядають питання побудови графіків фукцкції та застосування їх до розвязування вправ.

Графіком функції називається фігура, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Графічний спосіб задання функції



Маючи графік функції, можна знаходити її значення за відомим значенням аргументу і навпаки: знаходити значення аргументу за відомим значенням функції.

Розглянемо, наприклад, функцію, графік якої зображено на рисунку. (Про таку функцію кажуть, що вона задана графічно).

Знайдемо за допомогою графіка значення функціх, якщо $x = 4$. Для цього через точку осі Ox з абсцисою 4 проведемо пряму, паралельну осі Oy. Точка її перетину з графіком функції має координати $(4;8)$. Отже, якщо $x = 4$, то значення функції дорівнює

8. Знайдемо за допомою цього ж графіка значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 6. Для цього через точку осі Oy з ординатою 6 проведемо пряму, паралельну осі Ox. Одержимо дві точки її перетину із графіком функції: $(2;6)$ і $(8;6)$. Отже, функція набуває значення 6, якщо $x = 2$ або $x = 8$.

Деяка лінія на координатній площині задає функцію, якщо, користуючись нею, для кожного значення змінної x можна знайти тільки одне значення змінної y.

Дивлячись на графік, зображений на рисунку, можна відмітити деякі властивості функції, заданої цим графіком.

1. Область визначення функції утворюють усі значення x, що задовольяють нерівності $-5 \leq x \leq 10$.

2. Найбільше значення функції дорівнює 9 (цього значення функція набуває, якщо $x = 6$).

3. Найменше значення функції дорівнює -2 (цього значення функція набуває, якщо $x = -5$).

4. Область значень функції утворюють усі значення y, що задовольняють нерівності $-2 \leq y \leq 9$.

5. Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = -3$. Ті значення аргументу, для яких значення функції дорівнює нулю, називають нулями функції. Отже, значення $x = -3$ є нулем даної функції.

6. Функція набуває додатних значень, якщо $-3 < x \leq 10$; від'ємних значень $-5 \leq x < -3$.

Щоб побудувати графік функції, треба скласти таблицю значень її аргументу і знайти відповідні їм значення функції. Точки з одержаними координатами наносять на координатну площину і з’єднують їх лінією.

За допомогою графіка функції можна знаходити значення функції в інших точках координатної площини. Для цього треба знайти на осі Ox потрібне значення аргументу, відповідну йому точку графіка, і з’ясувати, яку ординату має ця точка графіка.

Якщо графік перетинає вісь абсцис, то можна зробити висновок, що функція набуває значення нуль при x, що дорівнює абсцисам точок перетину з віссю.

За графіком можна з’ясувати, при яких значеннях x функція набуває додатних значень (для яких значень x графік функції лежить вище осі абсцис), і при яких від’ємних значень (для яких значень x графік функції лежить під віссю абсцис).

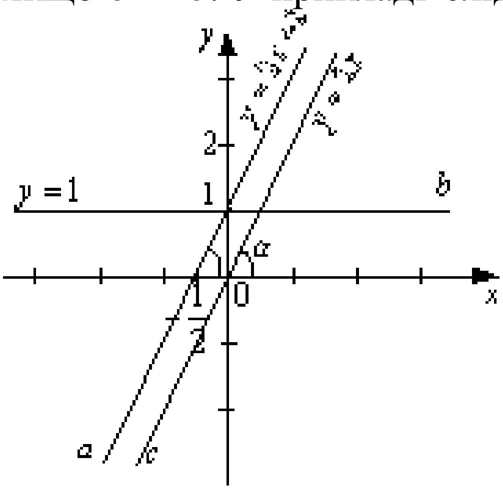
За графіком можна з’сувати чи функція зростаюча, чи спадна.

Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції.

Функція називається спадною, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції.

Лінійна функція. Лінійною функцією називають функцію, що задається формулою $y = bx + c$, де x – аргумент; c, b – константи. Її графік – пряма лінія. Наприклад, задано функцію $y = 2x + 1$. Розглянемо частинні випадки побудови графіків цієї функції.

1. Побудувати графік функції $y = bx$ – графік прямої пропорційності, який є частинним видом рівняння $y = bx + c$, якщо $c = 0$. У прикладі слід побудувати графік функції $y = 2x$.



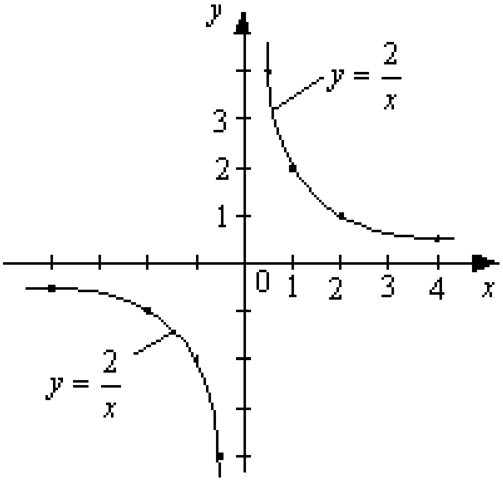
Графіком є пряма лінія, що утворює з віссю абсцис деякий кут α.

2. Побудувати графік функції $y = c$ (це частинний вид рівняння $y = bx + c$, якщо $b = 0$), тобто у прикладі побудувати графік функції $y = 1$.

Графіком є пряма лінія, паралельна осі абсцис.

3. Побудувати графік функції $y = bx + c$, тобто у прикладі – графік функції $y = 2x + 1$.

Вправа: Побудувати графік функції $y = \frac{(x-1)^2}{x-1}$.



Графік оберненої пропорційності.

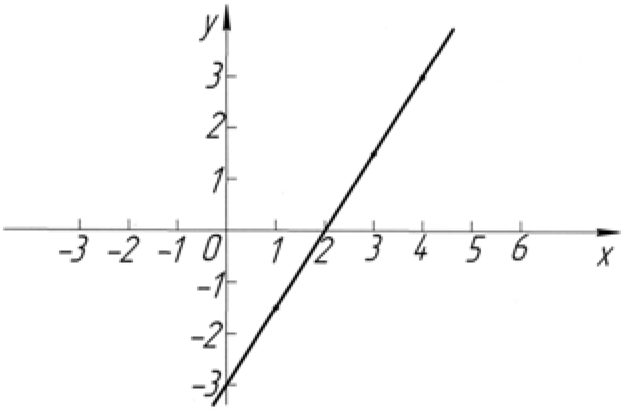
Обернено пропорційні величини x та y пов'язані співвідношенням $xy = b$ або $y = \frac{b}{x}$, причому $x \neq 0$, $y \neq 0$. Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{2}{x}$.

Графіком є рівностороння гіпербола.

Графік лінійного рівняння з двома змінними.

Розглянемо рівняння $3x - 2y = 6$. Надавши змінній x значень 0, 1, 2, 3,..., знайдемо відповідні значення змінної y.

Матимемо розв'язки даного рівняння: $(0;\,-3)$; $(1;\,-1{,}5)$; $(2;0)$; $(3;1{,}5)$, …

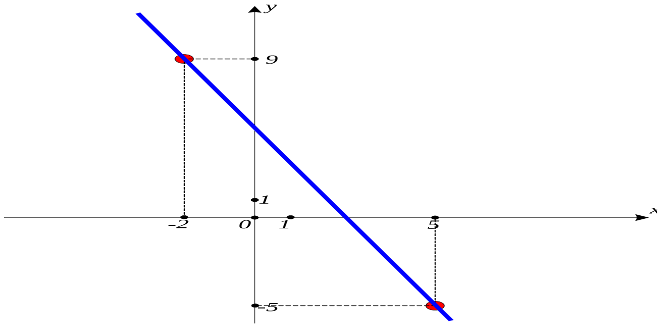


Якщо на координатній площині позначити точки, що відповідають цим парам, виявиться, що всі вони розміщені на одній прямій.

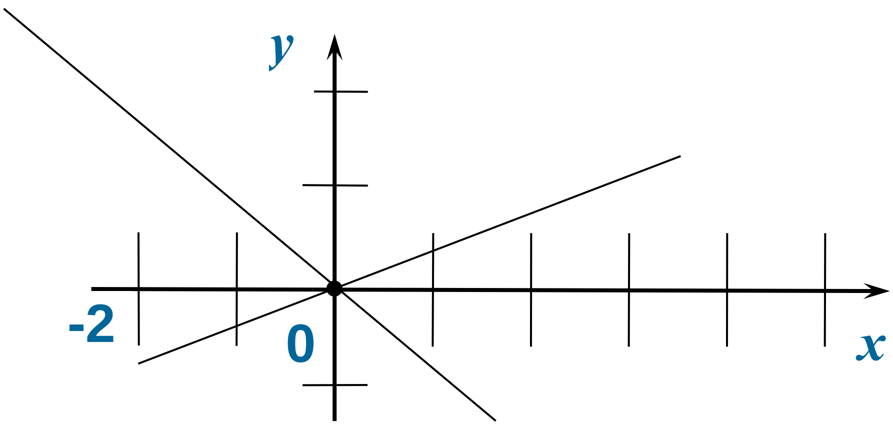
Цю пряму називають графіком (графік - graph) даного рівняння. Графік кожного рівняння першого степеня з двома змінними – пряма.

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c – деякі числа, називається лінійним рівнянням з двома змінними x і y.

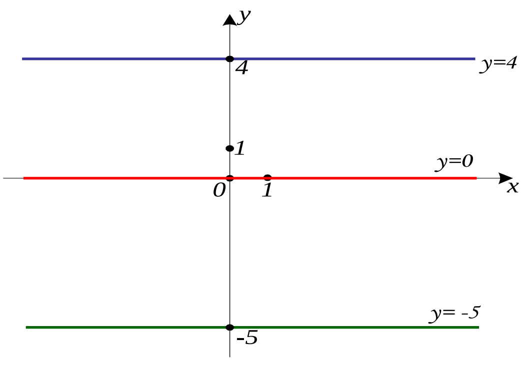
Графіком кожного лінійного рівняння з двома змінними є пряма.



Якщо a, b і c не дорівнюють нулю, то пряма проходить під кутом до координатних осей і перетинає їх у двох точках.

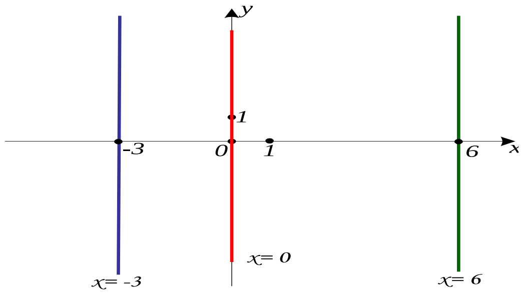


Якщо права частина лінійного рівняння з двома змінними дорівнює нулю, то пряма проходить через початок координат.



Якщо коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, а інші не дорівнюють нулю, то пряма паралельна осі Ox.

Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при y, не дорівнюють нулю, то пряма паралельна осі Oy.



Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при y, дорівнюють нулю, то пряма співпадає з віссю абсцис.

Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при x, дорівнюють нулю, то пряма співпадає з віссю ординат.

Якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, то графіком будуть усі точки координатної прямої.

Якщо всі коефіцієнти, окрім вільного члена, дорівнюють нулю, то не одержимо жодної точки.

Якщо потребується знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, то говорять, що ці рівняння утворюють систему.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Домашнє завдання

№1. Побудуйте графік функції: $y=\begin{cases}2+x,\ x<0\\ 2-x,\ 0\le x\le 2\\ 0,\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$

№2. Побудуйте графік функції: $(x+3)\cdot y=x^2-9$, $y=\frac{2x^3}{x^2}+1$, $y=\frac{x-3}{2x-6}$, $y=\frac{x^2-9}{x+3}+2$, $y=\frac{x^3-8}{x-2}-x^2-x-1$, $y=\frac{x^2-3x}{2x-6}+\frac{x^2-4}{x+2}$, $y=|x-3|+2$

№3.Знайти область визначення функцій: $y=\frac{2x+1}{x-3}$, $y=\frac{5x-2}{4}-\frac{4}{|x|-3}$, $y=\frac{3}{|x|-1}-\frac{x}{x^2-4}$.

№4. При яких значеннях параметра а:

1) Графік функції $y=(a-3)x-9$ проходить через точку А(2;1);

2) Графік функції $y=ax-4+2a$ проходить через точку перетину прямої $y-3x=2$ з віссю абсцис;

3) Графік функції $y=(2a+1)x+a$ перетинає пряму $f(x)=3x-4$ на вісі ординат;

4) Графік функції $y=2x-5+3a$ проходить через точку перетину прямих $y-2x=3$ і $y+x-6=0$;

5) Графік функції $y=(6-5a))x-a+2$ паралельний до вісі абсцис;

6) Графік функції $y=(4a+1)x-6$ паралельний до прямої $f(x)=-7ax+0{,}5$;

7) Графіки функцій $y=(2-5a)x-6-a$ і $y=(2a-3)x-8$ не перетинаються?

№5. Побудуйте графік функції: $y=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{x-3},\ -1\le x\le 4,\\ 5(x-5)^0,\ \ x\ge 4.\end{cases}$

№6.Чи належить графіку рівняння $4x-8y=7$ хоча б одна точка, у якої обидві координати – цілі числа?