Текстові задачі

Лінійні рівняння, які ми вчили раніше, моделюють багато ситуацій з реального життя. Для розв'язку різноманітних текстових задач (зокрема, задач на рух та на відсоткові розрахунки) необхідно скласти лінійне рівняння та розв'язати його. Нагадаємо, що таке лінійне рівняння, та як його розв'язати.

Означення: Лінійним рівнянням з однією змінною називається рівняння вигляду

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

де a, b – фіксовані дійсні числа, які називають коефіцієнтами рівняння . Тут a – коефіцієнт перед x або старший член, b – вільний член.

Означення: Розв'язком (коренем) лінійного рівняння з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює рівняння на правильну рівність.

Наприклад, число $x_0 = 1$ є розв'язком рівняння $2x - 2 = 0$, оскільки рівність $2 \cdot 1 - 2 = 0$ виконується, а число $x_0 = 2$ не є розв'язком цього рівняння, оскільки рівність $2 \cdot 2 - 2 = 0$ не є правильною.

Означення: Рівняння називаються еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають.

Лінійні рівняння розв'язують залежно від значень чисел a, b за **схемою**:

i) якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$;

ii) якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має розв'язків;

iii) якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – довільне дійсне число.

Наприклад, рівняння $0x + 3 = 0$ не має розв'язку.

Для того, щоб розв'язати текстову задачу, потрібно:

- ввести невідому змінну;

- виходячи з умови задачі описати, які значення може приймати змінна та які співвідношення виконуються для неї;
- записати рівняння;
- розв'язати його;
- записати відповідь, відповідно до умови задачі.

Наголошуємо, що повний опис при розв'язанні текстової задачі вимагається завжди. Розв'язок не може починатися одразу з рівняння, отриманого невідомо як.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад. Сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел дорівнює 140. Знайти ці числа.

Нехай шукані 4 числа дорівнюють $2x, 2x+2, 2x+4, 2x+6$, де x – натуральне. Тоді за умовою:

$$2x+(2x+2)+(2x+4)+(2x+6)=140,$$

$$8x+12=140,$$

$$8x=128,$$

$$x=16.$$

Відповідь. 32, 34, 36, 38.

Приклад. Мама зняла з полиці чверть книжок, що там стояли, і ще 10 книжок, після чого на полиці залишилось ${}^{2}/_{3}$ від початкової кількості книжок. Скільки книжок було на полиці?

Нехай на полиці було x книжок, x – натуральне. Тоді мама зняла всього $\frac{x}{4}+10$ книжок, а залишилось $x-\left(\frac{x}{4}+10\right)$ книжок, що за умовою також дорівнює $\frac{2}{3}x$ книжок. Отже,

$$x-\left(\frac{x}{4}+10\right)=\frac{2}{3}x,$$

$$\frac{x}{12}=10,$$

$$x=120.$$

Відповідь. 120 книжок.

Приклад. Знайти число, якщо відомо, що від додавання до нього ${}^{2}\!/_{3}$ його та віднімання від отриманної суми її третини отримаєм 10.

Нехай шукане число x. В умові не накладено жодних обмежень на це число, тому будемо вважати його дійсним. Після додавання до числа ${}^{2}\!/_{3}$ його, одержуємо $x + \frac{2}{3}x$. Від одержаного віднімемо третину – буде $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right)$, що за умовою дорівнює 10, тобто

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10,$$

$$x\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 10,$$

$$x \cdot \frac{10}{9} = 10,$$

$$x = 9.$$

Відповідь. 9.

При розв'язування <u>задач на рух</u> варто пам'ятати формули із фізики. Якщо позначити за $v \frac{\text{км}}{\text{год}}$ – швидкість об'єкта, що рухається, за s км – шлях, який він має проїхати, а за t год – час, за який це відбувається, то справедливі рівності:

$$v = \frac{s}{t}, s = tv, t = \frac{s}{v}.$$

Приклад. Автомобіль проїхав за три дні 2300 км, причому за другий день він проїхав на 48 км більше, ніж за перший, а за третій – на 31 км більше, ніж за другий. Скільки кілометрів проїжав автомобіль кожного дня?

Нехай за перший день автомобіль проїхав $s_1 = x$ км, $x > 0$. Тоді за другий день він проїхав $s_2 = x + 48$ км, а за третій – $s_3 = (x + 48) + 31$ км. За умовою $s_1 + s_2 + s_3 = 2300$ км, тобто

$$x + (x + 48) + (x + 79) = 2300,$$

$$3x + 127 = 2300,$$

$$x = 724\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $724\frac{1}{3}$ км, $772\frac{1}{3}$ км, $803\frac{1}{3}$ км.

Приклад. Знайдіть швидкість і довжину поїзда, знаючи, що він проходив зі сталою швидкістю повз нерухомого спостерігача за 7 с, і витратив 25 с, щоб з тією ж швидкість проїхати вздовж платформи довжиною 378 м.

Нехай довжина потяга x м, $x > 0$. Тоді повз спостерігача поїзд проходить шлях s, рівний своїй довжині, за час $t = 7$ с, зі швидкістю $v = \frac{s}{t} = \frac{x}{7}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. З іншого боку, повз платформу поїзд проходить шлях $\tilde{s}$, рівний сумі довжин платформи та поїзда, за час $\tilde{t} = 25$ с, з тією ж швидкістю $v = \frac{\tilde{s}}{\tilde{t}} = \frac{x+378}{25}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Звідси

$$\frac{x}{7} = \frac{x + 378}{25},$$

$$\frac{18}{7}x = 378,$$

$$x = 147.$$

Отже, довжина поїзда 147 м, а швидкість руху $v = \frac{147}{7} = 21\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Звичайно, варто також перевести швидкість поїзда в більш звичні для такого виду транспорту одиниці: $21\frac{\text{м}}{\text{с}} = 21 \cdot \frac{3600}{1000}\frac{\text{км}}{\text{год}} = 75{,}6\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь. $75{,}6\frac{\text{км}}{\text{год}}$, 147 м.

При розв'язування задач на <u>відсотки</u>, варто пам'ятати наступні формули.

1) $p\%$ від числа a – це таке число b, що обчислюється за формулою $b = a \cdot \frac{p}{100}$.

2) якщо число b дорівнює $p\%$ від числа a, то $a = b \cdot \frac{100}{p}$.

3) якщо суму a_0 вкладають під p% річних, то через рік на рахунку буде $a_1 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, через 2 роки – $a_2 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$,..., через n років – $a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ (формула складних відсотків).

Приклад. Периметр прямокутника дорівнює 64 см; довжина однієї з його сторін на 40% менша за другу. Знайдіть площу прямокутника.

Нехай одна сторона прямокутника – x см, $0 < x < 64$. Тоді інша сторона прямокутника – $\left(1-\frac{40}{100}\right)x = 0{,}6x$ см, а периметр прямокутника дорівнює $2(x+0{,}6x)$ см. Отже, за умовою

$$2(x+0{,}6x) = 64,$$

$$1{,}6x = 32,$$

$$x = 20.$$

Таким чином, сторони прямокутника 20 та $0{,}6 \cdot 20 = 12$ см, а площа $S = 20 \cdot 12 = 240$ см^2.

Відповідь. 240 см^2.

Приклад. У чотири бідони розлили молоко. У перший бідон налили 30% усього молока, у другий – 5/6 того, що в перший, у третій – на 26 л менше, ніж у перший, а у четвертий – на 10 л більше, ніж у другий. Скільки літрів молока розлили у бідони?

Нехай всього було x літрів молока, $x > 0$. В перший бідон налили $\frac{30}{100}x = 0{,}3x$ л, в другий – $\frac{5}{6} \cdot \frac{30}{100}x = \frac{1}{4}x = 0{,}25x$ л, в третій – $(0{,}3x - 26)$ л, в четвертий – $(0{,}25x + 10)$ л. Таким чином по бідонам розлили все молоко, тобто

$$0{,}3x + 0{,}25x + (0{,}3x - 26) + (0{,}25x + 10) = x,$$

$$0{,}1x = 16,$$

$$x = 160.$$

Відповідь. 160 л.

Приклад. Із молока одержують 21% сметани, а зі сметани – 23% масла. Скільки кг молока треба взяти, щоб одержати 966 кг масла?

Нехай було x кг молока, $x > 0$. З нього зробили $\frac{21}{100}x$ кг сметани, а з неї – $\frac{23}{100}\left(\frac{21}{100}x\right)$ кг масла. Отже, за умовою

$$\frac{21}{100} \cdot \frac{23}{100} x = 966,$$

$$x = \frac{966}{21 \cdot 23} \cdot 10000,$$

$$x = 20000.$$

Відповідь. 20000 кг.

<u>Домашнє завдання</u>.

1. Сума п'яти послідовних непарних чисел дорівнює 215. Знайти ці числа.

2. Марійка, Юля, Оленка й Тетянка варили варення. Оленка отримала на 0,2 кг варення більше ніж Тетянка. Юля та Марійка отримали варення порівну, причому кожна у 2 рази більше ніж Тетянка. Скільки варення зварили кожна дівчина?

3. Турист за 2 дні пройшов 48 км. Першого дня він пройшов у два рази більше ніж другого. Який шлях проходив турист кожного дня?

4. Відстань між двома містами річкою на 55 км менша, ніж по шосе. З одного міста до другого можна дістатися теплоходом за 6 год, а по шосе автобусом за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкість автобуса і теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ менша за швидкість автобуса.

5. У трьох цехах заводу працює 101 робітник. Кількість робітників першого цеху становить 4/9 кількості робітників третього цеху, а кількість робітників другого цеху – 80% кількості робітників третього цеху. Скільки робітників працює в першому цеху?

6. Велосипедисти взяли участь у триденному поході. За другий і третій день вони проїхали відповідно 120% і 4/5 відстані, яку подолали за перший день. Який шлях вони проїхали за перший день, якщо довжина всього маршруту 270 км?

7. На трьох полицях стояли книжки. На першій полиці стояло 4/5 усіх книжок, на другій – 60% усіх книжок, а на третій – на 8 книжок менше, ніж на першій. Скільки всього книжок стояло на 3х полицях?