

Лекція №5

Функції та їх графіки. Квадратний корінь та його властивості. Від'ємні степені

1. Поняття функції. Графік функції

Означення: Функцією називають певне правило, за яким одній величині (незалежній змінній) однозначно ставиться у відповідність інша величина (залежна змінна).

Функція може бути задана аналітично (формулою), таблично, вербально (словами).

Означення: Областю визначення функції $f(\cdot)$ називається множина $D(f)$ всіх таких значень x , для яких вираз $f(x)$ має сенс.

Означення: Областю значень функції $f(\cdot)$ називається множина $E(f)$ всіх значень $f(x)$, яких набуває вираз $f(x)$ в точках x з множини $D(f)$.

Приклад 1. Знайти області визначення та області значень функцій:

$$\text{а) } f(x) = 1 - x; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + 2.$$

а) Оскільки функція немає обмежень на область визначення та на область значень, то $D(f) = R$ і $E(f) = R$.

б) Для відповіді на питання потрібні певні алгебраїчні перетворення, що базуються на формулах скороченого множення,

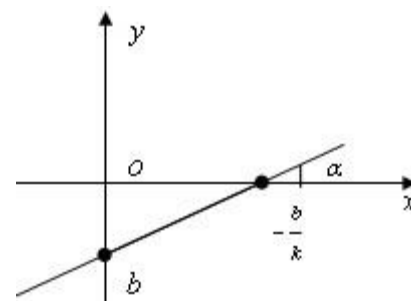
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + 2 = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} + 2 = x + 3, x \neq 1.$$

Тоді, $D(f) = R \setminus \{1\}$ і $E(f) = R \setminus \{2\}$.

Означення: Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $(x; y)$ на координатній площині xOy , таких що $y = f(x)$.

2. Графік лінійної функції $y = ax + b$

Графіком функції $y = ax + b$ є пряма. Оскільки з аксіом планіметрії будь-які дві точки на площині однозначно визначають пряму, то графік лінійної функції будується абсолютно однозначно після знаходження двох точок $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, що задовольняють рівняння $y = ax + b$.



Приклад 2. Побудуйте графік $y = 3x - 1$.

3. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік

Означення: Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ — дійсне число, називають функцією оберненої пропорційності. Її області визначення та значень відповідно мають вигляд: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функція $y = \frac{k}{x}$ не має нулів, оскільки

рівняння $\frac{k}{x} = 0$ не має коренів, тому

графік функції $y = \frac{k}{x}$ не перетинає вісь

Ox . Фігура, що є графіком функції

$y = \frac{k}{x}$ називається гіперболою, яка

складається з двох віток. Якщо $k > 0$, то

вітки гіперболи розташовані в I і III

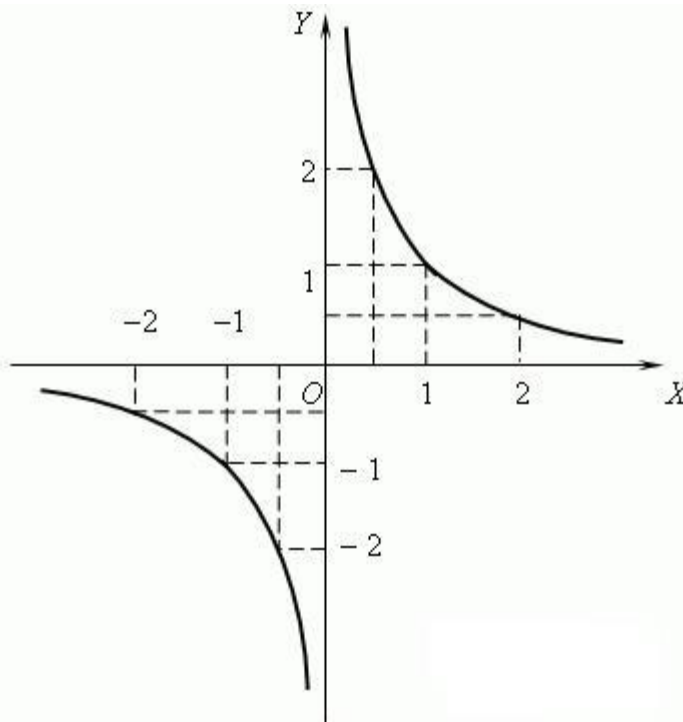
координатних кутах (див. мал.), якщо

$k < 0$, то вітки гіперболи розташовані в

II і IV координатних кутах.

Приклад 3. Побудуйте графіки:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x}$.



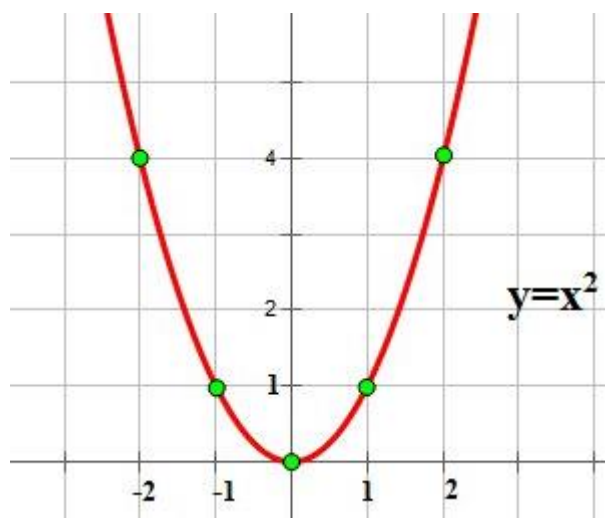
4. Функція $y = x^2$ та її графік

Означення: Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0, b, c$ – дійсні числа, називають квадратичною.

На даному етапі ми розглянемо лише частковий випадок квадратичної функції $y = ax^2, a \neq 0$.

Області визначення та значень відповідно мають вигляд: $D(y) = R$ і $E(y) = R$.

Фігура, що є графіком функції $y = x^2$ називається параболою. Точка $O(0;0)$ на параболі називається її вершиною, а частини графіка при $x < 0$ та $x > 0$, – відповідно її лівою і правою гілками. Вітки параболи направлені вгору, якщо $a > 0$; вниз, якщо $a < 0$.



Приклад 4. Побудуйте графіки функцій: а) $y = \frac{x^3}{x}$; б) $y = -x^2$.

5. Квадратичний корінь

Нехай a – невід'ємне дійсне число.

Означення: Квадратним коренем числа a називається число b , квадрат якого дорівнює числу a .

Наприклад, квадратним коренем із 49 є число 7 та число -7 , бо $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$.

Означення: Арифметичним квадратним коренем числа a називається невід'ємне число b , квадрат якого дорівнює числу a .

Позначення: \sqrt{a} .

Наприклад, $\sqrt{49} = 7$, бо $7^2 = 49$ і $7 \geq 0$.

Властивості: Нехай a та b – довільні дійсні числа, n – довільне натуральне число. Справедливі властивості.

1. Якщо $b \geq 0$ і $b^2 = a$, то $\sqrt{a} = b$.
2. Якщо $a \geq 0$, то $\sqrt{a} \geq 0$ і $(\sqrt{a})^2 = a$; (якщо, $a < 0$ то $\sqrt{-a} \geq 0$ і $(\sqrt{-a})^2 = -a$, тобто $a = -(\sqrt{-a})^2$).
3. $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.
5. Якщо $a \geq 0, b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; (якщо $a < 0, b < 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$).
6. Якщо $a \geq 0, b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; (якщо $a < 0, b < 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$).
7. Якщо $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
8. Якщо $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Приклад 5. Порівняти значення виразів $\sqrt{50}$ і $6\sqrt{2}$ можна двома способами.

1. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Оскільки $5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$. Перетворення, що було виконано з $\sqrt{50}$ називають винесення множника з-під знака кореня.

2. $6\sqrt{2} = \sqrt{36} \sqrt{2} = \sqrt{72}$. Оскільки $50 < 72$, то $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Отже, $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Таке перетворення називають внесенням множника під знак кореня.

Приклад 6. Винести множник з-під знака кореня: а) $\sqrt{a^7}$; б) $\sqrt{(a-5)^3}$, $a \geq 5$

а) Вираз має зміст, якщо $a \geq 0$. Маємо: $\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 a} = \sqrt{(a^3)^2} \sqrt{a} = |a^3| \sqrt{a} = a^3 \sqrt{a}$;

б) Якщо $a \geq 5$, то $a-5 \geq 0$ і $\sqrt{(a-5)^3} = (a-5)\sqrt{a-5}$.

Приклад 7. Внести множник під знак кореня:

$$\text{а) } -4\sqrt{x}; \quad \text{б) } a\sqrt{2}; \quad \text{в) } (4-x)\sqrt{\frac{x}{x-4}}, \quad x > 4; \quad \text{г) } (5-a)\sqrt{\frac{1}{25-a^2}}, \quad 0 < a < 5.$$

$$\text{а) } -4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16} \sqrt{x} = -\sqrt{16x};$$

$$\text{б) } \text{Якщо } a > 0, \text{ то } a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \sqrt{2} = \sqrt{2a^2};$$

$$\text{якщо } a < 0, \text{ то } a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2};$$

$$\text{в) } (4-x)\sqrt{\frac{x}{x-4}} = -(x-4)\sqrt{\frac{x}{x-4}} = -\sqrt{\frac{(x-4)^2 x}{x-4}} = -\sqrt{x^2 - 4x};$$

$$\text{г) } (5-a)\sqrt{\frac{1}{25-a^2}} = \sqrt{\frac{(5-a)^2}{(5-a)(5+a)}} = \sqrt{\frac{5-a}{5+a}}.$$

Приклад 8. Спростити вираз: а) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$; б) $(3\sqrt{5} - 6\sqrt{2})(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$.

$$\text{а) } 3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a} = \sqrt{5a}(3-2+12) = 13\sqrt{5a};$$

б)

$$(3\sqrt{5} - 6\sqrt{2})(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3(\sqrt{5})^2 + 6\sqrt{5 \cdot 2} - 6\sqrt{2 \cdot 5} - 12(\sqrt{2})^2 = 3 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = 15 - 24 = -9.$$

Звільнення від ірраціональності в чисельнику та знаменнику

Заміна дробового виразу, у якого чисельник або знаменник (або обидва) ірраціональні, тотожно рівним йому виразом з раціональним чисельником (знаменником), називають звільненням від ірраціональності у чисельнику (знаменнику) дробового виразу.

Часто для звільнення чисельника (знаменника) дробового виразу від ірраціональності чисельник і знаменник цього виразу множать на множник, спряжений з чисельником (знаменником).

Спряженим з ірраціональним виразом A називають будь-який не рівний тотожно нулю вираз B , який у добутку з A не містить знака кореня, тобто $A \cdot B$ – раціональний вираз.

Розглянемо основні випадки звільнення від ірраціональності у знаменниках дробових виразів (аналогічно виконується звільнення від ірраціональності у чисельниках). Якщо є вирази виду $\frac{A}{\sqrt{B}}$, то для звільнення від ірраціональності у знаменнику необхідно чисельник і знаменник помножити на \sqrt{B} .

Приклад 9. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику:

$$\text{а) } \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}; \quad \text{в) } \frac{2}{7\sqrt{y}}.$$

$$\text{а) } \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{3}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{b}}{b}; \quad \text{в) } \frac{2}{7\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{7\sqrt{y}\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{7y}.$$

Розглянемо вирази виду $\frac{A}{\sqrt{a \pm b}}$. Вирази $\sqrt{a + b}$ та $\sqrt{a - b}$ взаємно спряжені, оскільки $(\sqrt{a + b}) \cdot (\sqrt{a - b}) = a - b$. Тому позбавитися від ірраціональності у знаменнику можна такими перетвореннями:

$$\text{якщо } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b, \text{ то } \frac{A}{\sqrt{a + b}} = \frac{A(\sqrt{a - b})}{(\sqrt{a + b})(\sqrt{a - b})} = \frac{A(\sqrt{a - b})}{a - b};$$

$$\text{якщо } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b, \text{ то } \frac{A}{\sqrt{a - b}} = \frac{A(\sqrt{a + b})}{(\sqrt{a - b})(\sqrt{a + b})} = \frac{A(\sqrt{a + b})}{a - b};$$

$$\text{якщо } a > 0, a = b, \text{ то } \frac{A}{\sqrt{a + b}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}.$$

Приклад 10. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику: а) $\frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{2}}}$; б) $\frac{5}{4 - \sqrt{11}}$.

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3 + \sqrt{2}})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

$$\text{б) } \frac{5}{4 - \sqrt{11}} = \frac{5(4 + \sqrt{11})}{(4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11})} = \frac{5(4 + \sqrt{11})}{16 - 11} = 4 + \sqrt{11}.$$

Розглянемо вирази виду $\frac{A}{\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}$. Помноживши знаменник на $\sqrt{a + \sqrt{b} - \sqrt{c}}$, одержимо у знаменнику: $(\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}})(\sqrt{a + \sqrt{b} - \sqrt{c}}) = a + b - c + 2\sqrt{ab}$. Помноживши далі одержаний вираз на $a + b - c - 2\sqrt{ab}$, матимемо: $(a + b - c + 2\sqrt{ab})(a + b - c - 2\sqrt{ab}) = (a + b - c)^2 - 4ab$, тобто звільняємося від

іраціональності у знаменнику. Зрозуміло, що на вказані вирази помножити необхідно одночасно чисельник і знаменник дробу.

Аналогічно звільняємося від іраціональності в знаменниках дробів виду

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} \text{ та } \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}.$$

ПРИКЛАД 11. Звільнитися від іраціональності у знаменнику:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2}.$$

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{2} - 3} = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5}}{(\sqrt{3} + 2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5}}{7 + 4\sqrt{3} - 5} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5}}{2 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5}}{2(1 + 2\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5})(2\sqrt{3} - 1)}{2(12 - 1)} = \frac{(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5})(2\sqrt{3} - 1)}{22}. \end{aligned}$$

Для розв'язання наступних прикладів треба пам'ятати такі формули скороченого множення:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} + \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

ПРИКЛАД 12. Спростити вираз: а) $\sqrt{11 + \sqrt{40}}$; б) $\sqrt{17 + 2\sqrt{30}}$; в) $\sqrt{19 - 2\sqrt{34}}$; г) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

а) Помітимо, що вираз $11 + \sqrt{40}$ можна подати у вигляді квадрату суми.

$$\text{Дійсно, } 11 + \sqrt{40} = 11 + 2\sqrt{10} = (\sqrt{10})^2 + 2\sqrt{10} + 1 = (\sqrt{10} + 1)^2.$$

$$\text{Тому } \sqrt{11 + \sqrt{40}} = \sqrt{(\sqrt{10} + 1)^2} = |\sqrt{10} + 1| = \sqrt{10} + 1.$$

б) Помітимо, що вираз $17 + 2\sqrt{30}$ можна представити у вигляді квадрату суми.

$$\text{Дійсно, } 17 + 2\sqrt{30} = 15 + 2\sqrt{15}\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{15} + \sqrt{2})^2 = |\sqrt{15} + \sqrt{2}| = \sqrt{15} + \sqrt{2}.$$

$$\text{Тому } \sqrt{17 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{15} + \sqrt{2}| = \sqrt{15} + \sqrt{2}.$$

$$\text{в) } \sqrt{19 - 2\sqrt{34}} = \sqrt{17 - 2\sqrt{17}\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{17} - \sqrt{2}| = \sqrt{17} - \sqrt{2}.$$

$$\text{г) } \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3} \cdot 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

ПРИКЛАД 13. Спростити вираз:

$$\text{а) } A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}; \quad \text{б) } A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}; \quad \text{в) } A = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}.$$

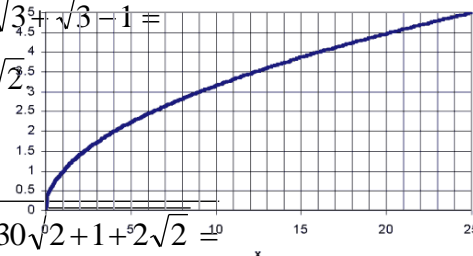
$$\text{а) } A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{9 + 2 + 2 \cdot 3\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot 2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5 + 1 + 2\sqrt{5} \cdot 1} - \sqrt{5 + 2 + 2\sqrt{5} \cdot 2}} = \frac{\sqrt{3} + 3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} - \sqrt{2}} = 3;$$

б)

$$\begin{aligned}
 A &= 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+2\sqrt{12}}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12+1+2\sqrt{12}}}} = \\
 &= 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12}-1}} = 2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{3+1-2\sqrt{3}\cdot 1}} = 2\sqrt{3+\sqrt{3}-1} = \\
 &= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6+2+2\sqrt{12}} = \sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+1+2\sqrt{8}\cdot 1}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}} = \\
 &= \sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} = \sqrt{25+18+2\sqrt{25\cdot 18}} = 5 + \sqrt{18} = 5 + 3\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$



6. Графік функції $y = \sqrt{x}$

Область визначення $D(y) = [0; +\infty)$.

Область значень $E(y) = [0; +\infty)$.

Графік функції проходить через початок координат і міститься у I чверті.

7. Від'ємні степені

Відоме означення степеня із натуральним показником можна узагальнити наступним чином.

Означення: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, де n – натуральне, $a \neq 0$, зокрема $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Властивості степеня з натуральним показником будуть справедливими і для степеня з від'ємним показником. Згадаємо ці властивості.

Властивості: Для довільних не нульових a, b та будь-яких цілих n, m виконується:

$$1. a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$2. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n.$$

$$4. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$5. (a^n)^m = a^{nm}.$$

Зауважимо, що $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

Приклад 14. Спростити: а) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; б) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{32}$;

$$в) \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + (-1,7)^0 - 2^{-3} = \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{8} = \frac{12+8-1}{8} = \frac{19}{8};$$

$$\Gamma) (a^{-2} - b^{-2}) : (a+b) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : (a+b) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} : (a+b) = \frac{b-a}{a^2 b^2};$$

$$\Delta) \left(-\frac{1}{6} a^{-3} b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2 b^9)^{-2} = (-6^3 a^2 b^{18}) \cdot \left(\frac{1}{6^2} a^{-4} b^{-18}\right) = -6a^5 b^0 = -6a^5;$$

$$\epsilon) \frac{1}{a^{-2}} (a^2 - b^2)^{-1} \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-1} + \frac{b}{a+b} = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a-b}{a} + \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Приклад 15. Порівняти значення виразів $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ та $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^{-1}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 3 + 4 = 7 > \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3+4}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{7}.$$

Домашня самостійна робота № 3

Знайдіть область визначення функцій: 1) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $y = \frac{3x - 1}{3x + 1}$; 3) $y = \frac{x}{x^3 + x}$.

2. Побудуйте графіки функцій: 1) $y \cdot x = 0$; 2) $(x^2 - 1)(y + 3) = 0$; 3) $y = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$.

3. Побудуйте графік рівняння:

$$1) (xy + 1)(y - 1) = 0; \quad 2) \frac{xy + 1}{x + y} = 0; \quad 3) (y - x)^2 + (y - x^2)^2 = 0.$$

4. Графік $y = 7 - 3x$ проходить через точку $A(a, 4)$. Не виконуючи побудови, знайти a .

5. Не виконуючи побудови, знайти точки перетину з осями координат графіків функцій: 1) $y = 4 - x$; 2) $y = 6 + |x|$.

6. Задано функцію $y = -\frac{12}{x}$. Не будуючи графік, знайти: 1) значення функції, якщо аргумент дорівнює -4 ; $1,5$; 2) значення аргументу, при якому функція дорівнює 6 ; -12 ; 3) вказати, через які точки проходить графік: $A(4; -3)$, $B(3; -4)$, $C(3; 4)$.

7. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) (3 - x) \sqrt{\frac{5}{x^2 - 6x + 9}}, x < 3; \quad 2) (a + 1)(a + 4) \sqrt{\frac{7}{a^2 + 8a + 16}}, -4 < a < -1.$$

8. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{0,36x^{14}y^{18}}, x \leq 0, y \geq 0$; 2) $\frac{\sqrt{m^{14}p^{16}c^{26}}}{m^3p^5c^{11}}, m < 0, c > 0$;

$$3) \frac{1,6a^7}{b^3} \sqrt{\frac{b^{22}}{0,64a^{10}}}, b > 0, a < 0; \quad 4) -0,3x^5 \sqrt{1,69x^{10}y^{12}}, x \leq 0; \quad 5) (21 - y) \sqrt{\frac{529}{(y - 21)^2}}, y > 21;$$

$$6) \frac{x^2 - 16}{(x + 2)^2} \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 4)^2}}, x < -4; \quad 7) 3a^2 \sqrt{25a^5b^7} + 2a^3b \sqrt{81a^3b^5} - 4a^2b^2 \sqrt{169a^5b^3}, a \geq 0, b \geq 0;$$

$$8) (2\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 5\sqrt{y}); \quad 9) (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5});$$

$$10) (3\sqrt{7} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{7}) - (4\sqrt{6} - \sqrt{2})^2;$$

$$11) \frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{12}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{12}} - 1}; \quad 12) \left(\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right)^2;$$

$$13) \left(\frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y}\right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y};$$

14) $\sqrt{87-16\sqrt{23}}-\sqrt{39-8\sqrt{23}}$; 15) $\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$; 16) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{8-\sqrt{33+20\sqrt{2}}}}$.

9. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(3-\sqrt{a})^2+12\sqrt{a}}-\sqrt{(1+\sqrt{a})^2-4\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt{b-2\sqrt{b+7}+8}+\sqrt{b+2\sqrt{b+7}+8}$.

10. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику:

1) $\frac{1}{\sqrt{11}-1}$; 2) $\frac{14}{\sqrt{17}+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{x^2-7x}{\sqrt{x-6}+1}$; 4) $\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 5) $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$.

11. Відомо, що $\sqrt{b-1}+\sqrt{8-b}=3$. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(b-1)(8-b)}$.

12. Спростіть вираз:

1) $0,28a^{-4}b^3c^{-5} \cdot \frac{3}{7}a^7b^{-16}c^7$; 2) $3\frac{4}{7}a^{-6}b^2 \cdot \left(1\frac{3}{7}a^2b^{-3}\right)^{-2}$; 3) $\left(\frac{25a^{-3}}{4b^{-2}}\right)^{-3} \cdot (25a^{-8}b^5)^2$;

4) $\left(\frac{3a^{-4}}{a^{-8}-10a^{-4}+25}-\frac{a^{-4}}{a^{-4}-5}\right) \cdot \frac{25-a^{-8}}{8-a^{-4}}-\frac{5a^{-4}}{5-a^{-4}}$.

Відповіді та вказівки

1. 1) $D_f = R/\{-1\}$; 2) $D_f = R/\{-\frac{1}{3}\}$; 3) $D_f = R/\{0\}$.

2. Графіком є 1) координатні осі; 2) прямі $x=1, x=-1, y=-3$; 3) пряма $y=x-3$.

3. Графіком є 1) об'єднання гіперболи $y=-\frac{1}{x}$ та прямої $y=1$;

2) гіпербола $y=-\frac{1}{x}$ без точок $(-1;1), (1;-1)$;

3) точки $(0;0), (1;1)$.

4. $a=1$

5.1) 3 Ох $(4;0)$, з Оу $(0;4)$; 2) 3 Ох немає, з Оу $(0;6)$.

6. 1) $y=3; y=-8$; 2) $x=-2; x=1$; 3) графіку належать точки А та В.

7. 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{7(a+1)^2}$.

8. 1) $-0,6x^7y^9$; 2) $-m^4p^3c^2$; 3) $-2b^8a^2$; 4) $0,39x^{10}y^6$; 5) -23 ; 6) $\frac{x-4}{x+2}$; 7) $-19a^4b^3\sqrt{ab}$;

8) $4x-25y$; 9) $5\sqrt{15}-12$; 10) $16\sqrt{3}-47$; 11) $\sqrt{3}-2$; 12) 16 ; 13) $\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$;

14) $12-2\sqrt{23}$; 15) $\sqrt{3}-1$; 16) 1 .

9. 1) $\begin{cases} 2+2\sqrt{a}, 0 < a < 1, \\ 4, a \geq 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2, -7 \leq b < -6, \\ 2\sqrt{b+7}, b \geq -6 \end{cases}$.

10. 1) $\frac{\sqrt{11}+1}{10}$; 2) $\sqrt{17}-\sqrt{3}$; 3) $x(\sqrt{x-6}-1)$; 4) $-(x+5)(2+\sqrt{x-1})$;

5) $\frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{30}-2)}{26}$.

11. 1. Вказівка: Піднести обидві частини рівності до квадрату, враховуючи область визначення.

12. 1) $\frac{2a^3c^2}{5b^{13}}$; 2) $\frac{42b^8}{25a^{10}}$; 3) $\frac{64b^4}{25a^7}$; 4) $\frac{a^{-8}}{5-a^{-4}}$.