Лекція №7.
Чотирикутники

1. Види чотирикутників.

   Означення. Паралелограмом називається чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

   Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

   Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні.

   Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

   Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні. Паралельні сторони трапеції називаються основами, не паралельні – бічними сторонами. Якщо бічні сторони трапеції рівні, то така трапеція називається рівнобедреною, або рівнобічною. Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають прямокутною.

   Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції.

2. Властивості чотирикутників:

   Паралелограм:
   1. У паралелограмі протилежні сторони і кути рівні.
   2. Сума суміжних кутів паралелограма дорівнює 180^0.
   3. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

   Прямокутник:
   1. Діагоналі прямокутника рівні.
   2. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, його центр – точка перетину діагоналей прямокутника, а радіус – половина діагоналі.

   Ромб:
   1. Діагоналі ромба перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.
   2. У будь-який ромб можна вписати коло, його центр – точка перетину діагоналей ромба, радіус – половина висоти ромба.

   Трапеція:
   1. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.
   2. У рівнобічній трапеції: а) кути при кожній основі рівні; б) діагоналі рівні; в) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює піврізниці основ, а більший – півсумі основ (тобто середній лінії трапеції).

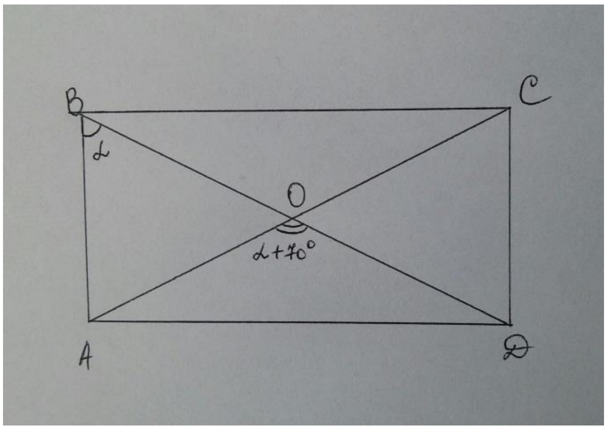
   Вписані чотирикутники: Чотирикутник можна вписати в коло, якщо сума його протилежних кутів дорівнює 180^0. Центр описаного навколо чотирикутника кола лежить на перетині серединних перпендикулярів його сторін.

   Описані чотирикутники: В чотирикутник можна вписати коло, якщо суми протилежних сторін чотирикутника рівні між собою. Центр вписаного в чотирикутник кола лежить на перетині бісектрис його кутів.

Розв'язування задач:

1. Знайти кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він на 70^0 менший від кута між діагоналями, який лежить навпроти більшої сторони.

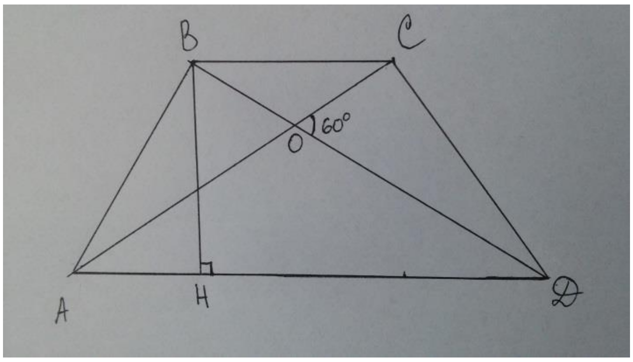
Розв'язок:



Розглянемо рівнобедрений трикутник AOB (AO=OB), отже, кут $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$. $\angle AOD$ – зовнішній кут трикутника AOB, тому $\alpha + \alpha = \alpha + 70^0$, звідки $\alpha = 70^0$.

2. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом 60^0. Знайти діагональ трапеції.

Розв'язок:



Розглянемо рівнобедрений трикутник AOD (AO=OD, оскільки трапеція рівнобедрена). Кут COD – зовнішній для цього трикутника, тому $\angle OAD + \angle ODA = 60^0$. Оскільки обидва кути рівні, то кожен із них дорівнює 30^0. Розглянемо трикутник BHD – прямокутний, BD=2 BH (катет навпроти кута $BDH = 30^0$). Отже, діагональ трапеції дорівнює $2h$.

3. Трапеція $ABCD$ вписана в коло. Основа AD є діаметром цього кола, а діагональ BD – бісектрисою гострого кута при основі трапеції. Більша основа трапеції дорівнює 58 см. Знайдіть довжину меншої основи трапеції.

Розв'язок:

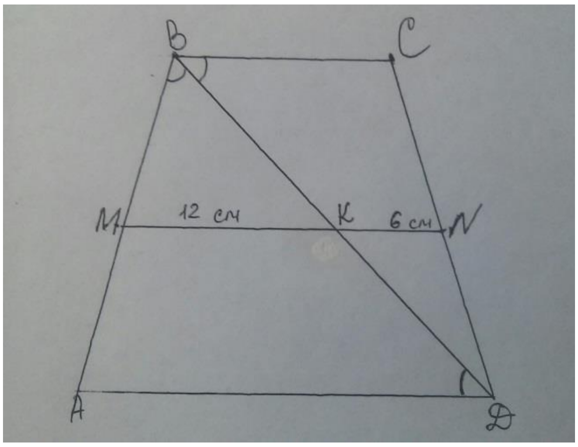
Зауважимо, що оскільки в коло можна вписати лише рівнобедрену трапецію, то і розглядувана трапеція є рівнобедреною. За умовою більша основа трапеції є діаметром кола, тому кут між діагоналлю трапеції і бічною стороною – прямий, як кут, що спирається на діаметр. З того, що діагональ BD – бісектрисою гострого кута при основі трапеції слідує, що:

1) трикутник BCD рівнобедрений, а отже менша основа дорівнює бічній стороні. Позначимо їх за x; 2) гострий кут α трапеції дорівнює 60^0, бо для трикутника ABD

$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^0 \rightarrow \alpha = 60^0$. Проведемо висоту ВН трапеції. У трикутнику АВН кут АВН=30^0, тому 2АН=АВ, $2 \cdot \frac{58-x}{2} = x \rightarrow x = 29 = BC$.

4. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить середню лінію на відрізки 6 і 12 см. Знайти периметр трапеції.

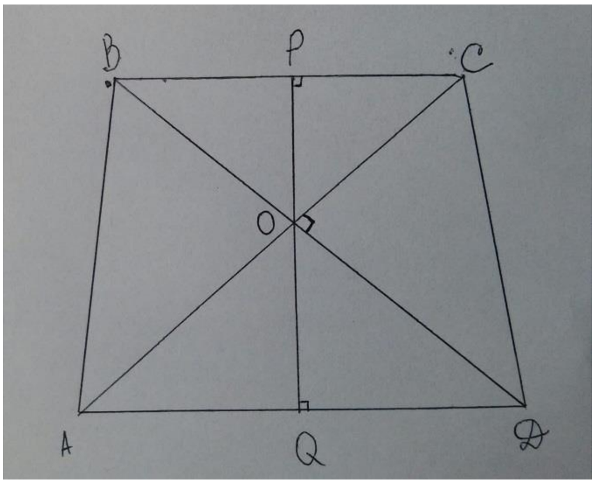
Розв'язок:



За умовою $\angle ABD = \angle CBD$. Але $\angle CBD = \angle BDA$ (внутрішні різносторонні), тому трикутник ABD – рівнобедрений. AD=AB=24 см (бо МК – середня лінія трикутника ABD), BC=2KN=12 см (KN – середня лінія DBC). Отже, периметр трапеції дорівнює (24+24+24+12) см = 84 см.

5. У рівнобічній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні. Довести, що висота дорівнює середній лінії трапеції.

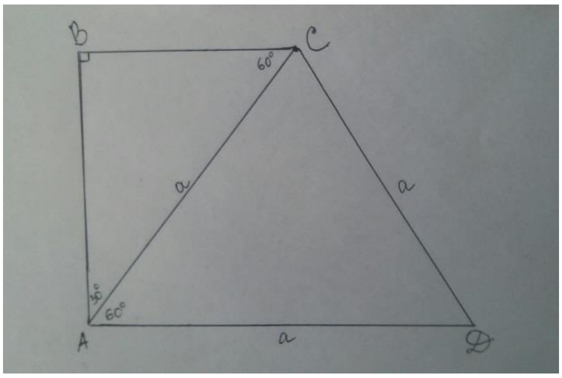
Розв'язок:



Проведемо висоту через точку перетину діагоналей трапеції. Розглянемо трикутник ВОС – прямокутний (за умовою) і рівнобедрений (оскільки трапеція рівнобічна), у ньому ОР – медіана і висота. Отже, $\angle CBO = \angle BCO = 45^0$, тому трикутник ВРО – теж прямокутний рівнобедрений, $OP = BP = \frac{BC}{2}$. Здійснімо аналогічні міркування для трикутника AOD, звідки $OQ = AQ = \frac{AD}{2}$. Висота трапеції $PQ = OP + OQ = \frac{BC + AD}{2}$, що й потрібно було довести.

6. Прямокутну трапецію діагональ ділить на два трикутники: правильний зі стороною *a* і прямокутний. Знайти середню лінію трапеції.

Розв'язок:

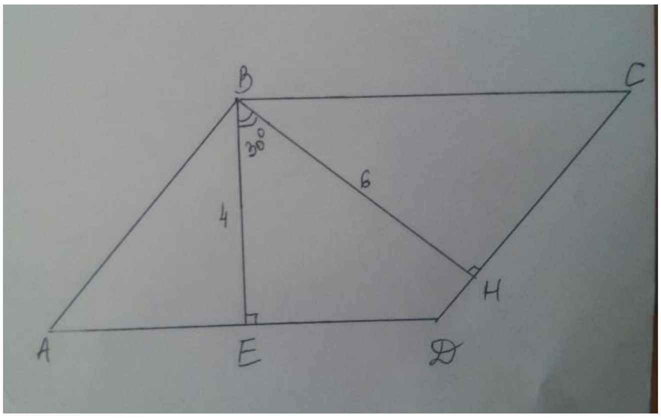


У задачі не вказано, яка саме діагональ поділила трапецію на два трикутники, але якщо обрати більшу діагональ, то отримаємо один трикутник прямокутний, а інший – тупокутний, який не може бути рівностороннім. Отже, ділимо трапецію на два трикутники меншою діагоналлю. Трикутник ACD – рівносторонній, $\angle CAD = 60^0$,

$\angle BAC = 30^0$, тоді $BC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$. Середня лінія трапеції дорівнює $\dfrac{a + \frac{a}{2}}{2} = \dfrac{3a}{4}$.

7. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30^0. Знайти периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 і 6 см.

Розв'язок:



Нехай BE та BH – висоти паралелограма, проведені із вершини тупого кута паралелограма ABCD. Розглянемо опуклий чотирикутник BEDH, сума його кутів 360^0, звідки $\angle D = 150^0$, отже $\angle A = 30^0$. Тому в прямокутному трикутнику ABE гіпотенуза AB=2BE=8 см, аналогічно в трикутнику BHC: BC=2BH=12 см. Периметр паралелограма дорівнює (16+24)=40 см.

8. Радіус кола, вписаного у рівнобічну трапецію дорівнює 5 см. Один з кутів трапеції на 120^o більший за інший. Знайти периметр трапеції.

Розв'язок:

Оскільки сума кутів при бічній стороні трапеції дорівнює 180^0, то позначивши за α гострий кут трапеції знайдемо його з рівності $\alpha + \alpha + 120^0 = 180^0$, $\alpha = 30^0$. Отже гострий кут трапеції дорівнює 30^0. Якщо основи трапеції позначити за a і b, $b > a$, то за властивістю описаного чотирикутника, бічна сторона трапеції $c = \dfrac{a+b}{2}$. Опустимо висоту з вершини тупого кута на основу b, отримаємо прямокутний трскутник з кутом 30^0, а отже катет, що лежить навпроти цього кута дорівнює $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} = 2r = 10 \rightarrow c = \frac{a+b}{2} = 20 \rightarrow a + b = 40$. Порахуємо периметр трапеції: $P = a + b + 2c = 2a + 2b = 80$ (см).

9. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника мають довжину 16 і 20 см відповідно. Відрізок, що з'єднує їх середини, відтинає від трикутника трапецію, у яку можна вписати коло. Знайдіть основи цієї трапеції та частину середньої лінії трапеції, яка знаходиться поза вписаним колом.

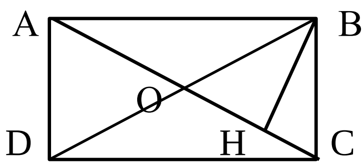
Розв'язок:

Позначимо невідомий катет за x і проведемо відрізок що з'єднує середини гіпотенузи і відомого катета. Оскільки цей відрізок є середньою лінією трикутника, то його довжина $\frac{x}{2}$. За властивістю описаних чотирикутників $x + \frac{x}{2} = \frac{16}{2} + \frac{20}{2} \Rightarrow x = 12$ см, а середня лінія трапеції дорівнює 9 см. Оскільки коло вписане в прямокутну трапецію, то її висота співпадає з її меншою бічною стороною і є діаметром вписаного кола, тому $2r = 8$ см. Шукана частина середньої лінії трапеції, яка знаходиться поза вписаним колом дорівнює 9-8=1 (см). Основи трапеції дорівнюють $\frac{x}{2}$=6 см, та $x = 12$ см.

10. Перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута прямокутника на його діагональ, поділяє її у відношенні 3: 1. Знайдіть периметр прямокутника, якщо точка перетину діагоналей віддалена від більшої сторони на 6 см.

Розв'язок:

Побудуємо прямокутник:

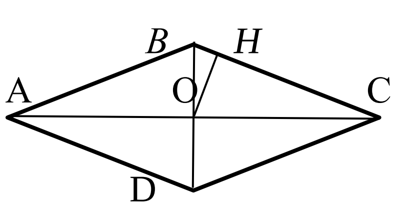


За умовою AH:HC=3:1, отже для точки перетину діагоналей O OH:HC=1:1, а трикутник OBC є рівнобедреним (OB=BC). Позначимо k – коефіцієнт пропорції, тоді OB=2x=BC=OC. Оскільки відстань від точки перетину діагоналей до більшої сторони 6 см, то менша сторона BC прямокутника 12 см, а отже x = 6 см, AC = 4x = 24 см. Для трикутника ABC за теоремою Піфагора маємо $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (4x)^2 = AB^2 + 12^2 \Rightarrow AB^2 = 24^2 - 12^2 = 12 \cdot 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 12\sqrt{3}$ см. Обчислимо периметр прямокутника $P = 2AB + 2BC = 24 + 24\sqrt{3}$ см.

11. Коло, вписане в ромб, поділяє сторону ромба на відрізки 9 і 16 см. Знайти висоту ромба та його діагоналі.

Розв'язок:

З умови сторона ромба дорівнює BC=9+16 = 25 см



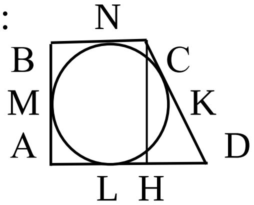
За властивістю висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи $OH^2 = BH \cdot HC = 9 \cdot 16 \Rightarrow OH = 12$ (см). Зрозуміло, що висота ромба дорівнює 2OH=24

см. З трикутників ОВН та ОНС за теоремою Піфагора шукаємо діагоналі:
$OB^2 = BH^2 + OH^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BD = 2OB = 30, OC^2 = HC^2 + OH^2 = 16^2 + 12^2 = 400, AC = 40$

12. Коло, вписане в прямокутну трапецію поділяє її більшу бічну сторону на відрізки 2 і 8 см. Знайти радіус кола і периметр трапеції.

Розв'язок:

Розглянемо прямокутну трапецію ABCD:



За умовою СК = 2, KD = 8 см. З рівності відрізків дотичних CK=KN=2, KD=DL=8, LA=AM=MB=BN=R. Проведемо висоту CH. В прямокутному трикутнику CHD за теоремою Піфагора маємо : $CD^2 = CH^2 + HD^2 \Rightarrow 10^2 = (2R)^2 + (R + 8 - R - 2)^2 \Rightarrow R = 4\,(\text{см})$.

Знайдемо периметр трапеції: $P = AB + BC + CD + AD = 2R + (R+2) + 10 + (R+8) =$
$= 4R + 20 = 36\ (\text{см})$.

Домашнє завдання :

1. Два кута паралелограма відносяться як 1:5. Знайти кут між висотами паралелограма, проведеними із вершини а) тупого; б) гострого кута паралелограма.
2. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки, один з яких на 3 см більший від іншого, рахуючи від вершини тупого кута. Знайти сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 18 см.
3. Трапеція $ABCD$ вписана в коло. Основа AD є діаметром цього кола, а діагональ AC – бісектрисою гострого кута при основі трапеції. Менша основа трапеції дорівнює 27 см. Знайдіть довжину більшої основи трапеції.
4. Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150^0, сторони паралелограма дорівнюють 10 і 18 см. Знайти висоти паралелограма.
5. У паралелограмі ABCD бісектриси кутів A і D поділяють сторону BC на три рівних відрізки. Знайти сторони паралелограм, якщо його периметр дорівнює 40 см.
6. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайти кути трапеції.
7. Відомо, що висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ. Знайти кути трапеції.
8. У прямокутнику ABCD AD=2AB. На стороні BC позначено точку M так, що кути AMB і AMD рівні. Знайти ці кути
9. Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини основ. Довести, що діагоналі цієї трапеції перпендикулярні.
10. Перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на його діагональ, поділяє її у відношенні 1 : 3. Знайдіть діагоналі прямокутника та його периметр , якщо точка перетину діагоналей віддалена від більшої сторони на 5 см.
11. У рівнобічну трапецію вписано коло. Один з кутів трапеції в 5 разів більший за інший. Знайти периметр трапеції, якщо радіус вписаного кола становить 15 см.

Відповіді:

1. а) 30^0; б) 150^0. **2**. 4 і 5 см. **3**. 54 см. **4**. 5 і 8 см. **5**. 8 і 12 або 5 і 15 см. **6**. 72^0 і 108^0. **7**. 45^0 і 135^0. **8**. 75^0. **10.** $20 + 20\sqrt{3}$ см. **11**. 240 см.