

Лекція № 1.
Повторення матеріалу за 6 клас.
Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною

Відсоток

Відсоток – це одна сота частина.

Щоб знайти відсоток від деякого числа необхідно помножити це число на відсоток і розділити на 100.

Приклад 1. Знайти 75% від числа 60.

Розв'язання: $\frac{60 \cdot 75}{100} = 45$. Число 45 – це 75% від числа 60.

Щоб знайти число a , відсоток якого дорівнює b необхідно розділити число b на відсоток і помножити на 100.

Приклад 2. Знайти число, 6% якого дорівнює 90.

Розв'язання: $\frac{90}{6} \cdot 100 = 1500$. Число 1500 – це число, 6% якого дорівнює 90.

Подільність чисел

Якщо число a ділиться на b з остачею r , тоді записують $a = b \cdot q + r$; $q \geq 0$; $0 < r < b$; b – дільник; q – неповна частка; r – остача.

Приклад 3. Знайти усі числа, які при діленні на 5 дають остачу 3. Знайти найменше число.

Розв'язання: $a = 5 \cdot q + 3$. Найменше число дорівнює 3.

Ознаки подільності

Число ділиться

на 2 – якщо остання цифра парне число;

на 3 – якщо сума цифр числа ділиться на 3;

на 9 – якщо сума цифр числа ділиться на 9;

на 5 – якщо остання цифра числа 0, або 5;

на 4 – якщо останні дві цифри числа утворюють число, яке ділиться на 4;

на 10 – якщо остання цифра 0;

на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3;

на 15, якщо воно ділиться на 3 і на 5;

на 18, якщо воно ділиться на 2 і на 9;

на 45, якщо воно ділиться на 5 і на 9;

на 36, якщо воно ділиться на 4 і на 9.

Приклад 4. Знайти остачу від ділення числа 72347158905432657 на 2; на 5; на 3; на 4; на 9; на 10.

Розв'язання:

1. Остача від ділення на 2 дорівнює 1. (Остання цифра при діленні на 2 дає остачу 1).
2. Остача від ділення на 5 дорівнює 2. (Остання цифра при діленні на 5 дає остачу 2).
3. Остача від ділення на 3 дорівнює 0. (Достатньо спочатку відкинути групи цифр, які кратні 3, а потім порахувати суму цифр які залишилися. Наприклад: комбінації 7+2;5+4; 8+1 і т.д. не враховувати.)
4. Остача від ділення на 4 дорівнює 1.(Поділити 57 на 4).
5. Остача від ділення на 9 дорівнює 6. (Роздуми аналогічні п.3).
6. Остача від ділення на 10 дорівнює 7.

Остання цифра степеня

Запис $a = (\overline{****b})$ позначає число a , остання цифра якого b .

Розглянемо, якою буде остання цифра числа a при піднесенні її до степеня n :

$$\begin{array}{lll} (\overline{****1})^n - \{1\}; & (\overline{****4})^n - \{4;6\}; & (\overline{****7})^n - \{7;9;3;1\}; \\ (\overline{****2})^n - \{2;4;8;6\}; & (\overline{****5})^n - \{5\}; & (\overline{****8})^n - \{8;4;2;6\}; & (\overline{****0})^n - \{0\}. \\ (\overline{****3})^n - \{3;9;7;1\}; & (\overline{****6})^n - \{6\}; & (\overline{****9})^n - \{9;1\}; \end{array}$$

Приклад 5. Знайти останню цифру числа $(1543)^{735}$.

Розв'язання: Враховуючи, що остання цифра основи степеня 3, тоді при піднесенні числа до степеня останньою цифрою може бути $\{3;9;7;1\}$. У такому випадку достатньо знайти остачу від ділення числа 735 (показник степеня) на 4, саме остача вказує порядковий номер останньої цифри степеня. Остача дорівнює 3, тоді остання цифра степеня дорівнює 7.

Приклад 6. Знайти остачу від ділення числа $(18)^{252}$ на 5.

Розв'язання: Враховуючи, що остання цифра основи степеня 8, тоді при піднесенні числа до степеня останньою цифрою може бути $\{8;4;2;6\}$. У такому випадку достатньо знайти остачу від ділення числа 252 (показник степеня) на 4, саме остача вказує порядковий номер останньої цифри степеня. Остача дорівнює 0, тоді остання цифра степеня дорівнює 6. Остача при діленні 6 на 5 дорівнює 1.

Кількість дільників

Кількість дільників числа представленого, як добуток степенів простих чисел $a^n \cdot b^m \cdot c^k$ можна обчислити за такою формулою $(n+1) \cdot (m+1) \cdot (k+1)$.

Приклад 7. Знайти кількість дільників числа $2^7 \cdot 3^5 \cdot 7$.

Розв'язання: За формулою маємо, що кількість дільників числа $2^7 \cdot 3^5 \cdot 7$ дорівнює $8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$.

Приклад 8. Знайти невідомий показник степеня $2^9 \cdot 3^n \cdot 5$, якщо кількість дільників даного числа дорівнює 160.

Розв'язання: За формулою кількості дільників, маємо $10 \cdot (n+1) \cdot 2 = 160$, звідки $n = 7$.

Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК)

Приклад 9. Знайти НСД($a;b$) і НСК($a;b$), якщо $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $b = 2^2 \cdot 3^3$.

Розв'язання: НСД($a;b$) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$; НСК($a;b$) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$.

Алгоритм Евкліда для знаходження НСД($a;b$)

Ідея реалізації:

1 крок: Виконати ділення a на b . Нехай $a > b$ і a поділилось на b з остачею r .

2 крок: Виконати ділення b на r , якщо $b > r$. Нехай b поділилось на r з остачею k і $k > r$, тоді знову необхідно знаходити остачу від ділення, поки не отримаємо остачу, яка дорівнює 0.

3 крок: Останнє ненульове значення остачі і є НСД шуканих чисел.

Приклад. НСД(11395;6665)=215, бо $11395=6665 \cdot 1 + 4730$; $6665=4730 \cdot 1 + 1935$; $4730=1935 \cdot 2 + 860$; $1935=860 \cdot 2 + 215$; $860=215 \cdot 4$.

Запис числа через розрядні одиниці

Запис числа \overline{abcde} через розрядні одиниці означає, що $\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$.

Приклад 10. Довести, що число $\overline{ab} + \overline{ba} : 11$.

Розв'язання: Використаємо запис числа через розрядні одиниці $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b) : 11$, оскільки містить множник 11.

Приклад 11. До числа справа приписали 36 і воно збільшилось у 103 рази. Яке це число?

Розв'язання: Нехай наше число дорівнює x . Якщо до нього приписали 36, то число буде мати вигляд $\overline{x36} = x \cdot 100 + 36$. За умовою число x збільшилось у 103 рази, тобто $x \cdot 100 + 36 = 103 \cdot x$. Звідси знаходимо $x = 12$.

Лінійні рівняння з однією змінною

Приклад 12. Розв'яжіть рівняння: **а)** $3x - 4 = 3(x - 2)$; **б)** $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

Розв'язання: **а)** $3x - 4 = 3(x - 2)$; $3x - 4 = 3x - 6$; $-4 = -6$. Рівняння не має розв'язків.

б) $3x - 2(x - 1) = x + 2$; $3x - 2x + 2 = x + 2$; $x + 2 = x + 2$. Рівняння має безліч коренів.

Приклад 13. Розв'яжіть рівняння: **а)** $\frac{x-3}{3} - \frac{2x}{9} = 2$; **б)** $\frac{x}{5} + \frac{3x-7}{15} = \frac{1}{3}$;

в) $2\left(3\frac{3}{4} - 2x\right) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - \left(-x + \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання: а) $\frac{x-3}{3} - \frac{2x}{9} = 2$; $\frac{3x-9-2x}{9} = \frac{18}{9}$; $x-9=18$; $x=27$.

Відповідь: $x=27$.

б) $\frac{x}{5} + \frac{3x-7}{15} = \frac{1}{3}$; $\frac{3x+3x-7}{15} = \frac{5}{15}$; $6x-7=5$; $x=2$.

Відповідь: $x=2$.

в) $2\left(3\frac{3}{4}-2x\right)+2,5=1\frac{2}{9}-\left(-x+\frac{2}{3}\right)$; $2\cdot\frac{15-8x}{4}+\frac{5}{2}=\frac{11}{9}+x-\frac{2}{3}$; $\frac{20-8x}{2}=\frac{5}{9}+x$;

$10-4x=\frac{5}{9}+x$; $5x=10-\frac{5}{9}$; $5x=\frac{85}{9}$; $x=\frac{17}{9}$.

Відповідь: $x=\frac{17}{9}$.

Приклад 14. Розв'яжіть рівняння: а) $2(x-11)-5(5-2x)=-23$;

б) $0,4(2x-7)+1,2(3x+0,7)=1,6x$; в) $5(4(x+1)-9x)=25(x+1)$; г) $2(-0,9x+1,4)+1,4(1,5+x)=x$.

Розв'язання: а) $2(x-11)-5(5-2x)=-23$; б) $0,4(2x-7)+1,2(3x+0,7)=1,6x$;

$2x-22-25+10x=-23$;

$0,8x-2,8+3,6x+0,84=1,6x$;

$12x=24$;

$2,8x=1,96$;

$x=2$.

$x=0,7$.

в) $5(4(x+1)-9x)=25(x+1)$;

г) $2(-0,9x+1,4)+1,4(1,5+x)=x$;

$4x+4-9x=5x+5$;

$-1,8x+2,8+2,1+1,4x=x$;

$10x=-1$;

$-1,4x=-4,9$;

$x=-0,1$.

$x=3,5$.

Відповідь: а) $x=2$; б) $x=0,7$; в) $x=-0,1$; г) $x=3,5$.

Приклад 15. Знайдіть значення x , при якому значення виразів $2x-3$ і $-3+7x$ дорівнюють одне одному.

Розв'язання: $2x-3=-3+7x$; $5x=0$; $x=0$.

Відповідь: при $x=0$ значення виразів $2x-3$ і $-3+7x$ дорівнюють одне одному.

Приклад 16. Розв'яжіть рівняння: $200(2(2(x-1)-1)-1)=-600$.

Розв'язання: $200(2(2(x-1)-1)-1)=-600$; $2(2(x-1)-1)-1=-3$; $2(x-1)-1=-1$; $x=1$.

Відповідь: $x=1$.

Приклад 17. Розв'яжіть рівняння: а) $(-4x-3)(3|x|+0,6)=0$; б) $|5x-3x-6+3|=3$;

в) $|2x-1|-4(1-|2x-1|)=6$.

Розв'язання: а) Оскільки добуток двох чисел дорівнює нулю, коли хоча б один з множників дорівнює нулю, то або $-4x-3=0$ або $3|x|+0,6=0$. Тоді маємо

$x=-\frac{3}{4}$, так як рівняння $3|x|+0,6=0$ розв'язків не має.

б) $|5x-3x-6+3|=3$. Маємо: $5x-3x-6+3=3$ або $5x-3x-6+3=-3$.

$2x=6$

$2x=0$

$$\text{в) } |2x-1|-4(1-|2x-1|)=6; \quad \begin{matrix} x=3 \\ |2x-1|-4+4|2x-1|=6; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=0. \\ 5|2x-1|=10; \end{matrix} \quad |2x-1|=2.$$

$$\text{Маємо: } 2x-1=2 \quad \text{або} \quad 2x-1=-2.$$

$$2x=3$$

$$x=\frac{3}{2}$$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: а) } x=-\frac{3}{4}; \quad \text{б) } x=3, \quad x=0; \quad \text{в) } x=\frac{3}{2}, \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 18. Доведіть, що значення виразу $4(8a-3)-16(2a+1)$ не залежить від значень a .

Розв'язання: $4(8a-3)-16(2a+1)=32a-12-32a-16=-28.$

Відповідь: значення виразу $4(8a-3)-16(2a+1)=-28$ і не залежить від значень a .

Приклад 19. Спростіть вираз $-\frac{5}{9}\left(5,4a-1\frac{4}{5}b\right)-6,4\left(-\frac{3}{8}a+2,5b\right)$ та обчисліть його значення, якщо $a=-10$; $b=0,1$.

Розв'язання: $-\frac{5}{9}\left(5,4a-1\frac{4}{5}b\right)-6,4\left(-\frac{3}{8}a+2,5b\right)=-\frac{5}{9}\left(\frac{27}{5}a-\frac{9}{5}b\right)-\frac{32}{5}\left(-\frac{3}{8}a+\frac{5}{2}b\right)=$
 $=-3a+b+\frac{12}{5}a-16b=-0,6a-15b.$

Якщо $a=-10$, $b=0,1$, то $-\frac{5}{9}\left(5,4a-1\frac{4}{5}b\right)-6,4\left(-\frac{3}{8}a+2,5b\right)=-0,6a-15b=$
 $=-0,6\cdot(-10)-15\cdot0,1=4,5$

Приклад 20. При якому a рівняння $2x-9=3$ та $x+3a=-10$ мають спільний корінь?

Розв'язання: Знайдемо корінь першого рівняння. $2x-9=3$, $x=6$. Так як два рівняння мають спільний корінь, то $x=6$ є коренем другого рівняння. Тоді $6+3a=-10$, $3a=-16$, $a=-\frac{16}{3}$.

Приклад 21. При якому a рівняння $(a-2)x+2=a$ має безліч коренів?

Розв'язання: $(a-2)x+2=a$; $(a-2)x=a-2$.

Якщо $a \neq 2$, то $x=1$. Якщо $a=2$, то рівняння має безліч коренів.

Відповідь: якщо $a=2$, то рівняння $(a-2)x+2=a$ має безліч коренів.

Приклад 22. При якому a рівняння $(a+2)x-3=a$ немає коренів?

Розв'язання: $(a+2)x-3=a$; $(a+2)x=a+3$.

Якщо $a \neq -2$, то $x=\frac{a+3}{a+2}$. Якщо $a=-2$, то рівняння немає коренів.

Відповідь: якщо $a=-2$, то рівняння $(a+2)x-3=a$ немає коренів.

Домашня робота №1

- Знайти НСД (1680;784), НСД(36;72;90).
- Знайти НСК (630;560).
- Знайти кількість дільників числа $a = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.
- Знайти невідомі цифри числа $\overline{7x35y}$, якщо відомо, що дане число кратне 45.
- Із 76 тюльпанів, 114 ромашок і 95 волошок склали букети, розділивши квіти в букети порівну. Скільки одержали букетів і скільки квіток кожного виду було в одному букеті?
- Знайти останню цифру числа **4563782983315x**, якщо: а) при діленні на 9 отримуємо остачу 7; б) при діленні на 5 отримуємо остачу 4.
- Знайти усі числа які при діленні на 5 дають остачу 1, а при діленні на 3 дають остачу 2.
- Одне число в 10 разів більше від іншого. У скільки разів НСК цих натуральних чисел більше від їхнього НСД.
- Обчислити: 1) $\frac{(-3^{11})^2 \cdot (9^4)^2 \cdot (-3^4)^3}{27^3 \cdot 81^3 \cdot (9^6)^3}$; 2) $\frac{10^3 \cdot 9^2}{6^3 \cdot 5^2}$.
- Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 9. Якщо від цього числа відняти 9, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.
- Чисельник дроби становить 60 % від знаменника. Знайдіть цей дріб, якщо: а) його знаменник 5; б) його чисельник 9.
- Спростіть вираз $1\frac{1}{2}\left(-2,4a + 3\frac{4}{5}b\right) - 1,6 \cdot \left(2\frac{1}{4}a - b\right)$ та обчисліть його значення, якщо $a = 2$; $b = -3$.

Розв'яжіть рівняння

- А) $(5x-8)(3x+27)=0$. В) $(1-2a)-3=1-2(a+2)$.
- А) $\frac{4y-51}{3} - \frac{y+5}{2} = \frac{17-3y}{4}$. В) $1\frac{2}{3}\left(2\frac{4}{5}-15x\right) + 29\frac{1}{9} = -\frac{8}{9} - \left(8x - \frac{2}{3}\right)$.
С) $\frac{2y+1}{3} - \frac{y-2}{5} = \frac{7y-5}{15}$.
- А) $(3|x|+12)(-2x-5)=0$. В) $15-4|x|=-1$. С) $|15(x+2)-12x|=30$.
D) $|5x+7|-6 \cdot (2+|5x+7|)=-27$.
- При яких значеннях x рівні вирази $2x-3(x-1)$ і $4+2(x-1)$?
- При якому значенні a рівняння $2x+1=5$ і $3x-7=2a-2$ мають спільний корінь?
- При якому значенні a рівняння $7a+x(a-3)=8\left(a-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}x\right)+2$ має безліч розв'язків?
- При якому значенні a рівняння $3a+a(x+2)=4(-x+a)+5$ немає розв'язків?
- Доведіть, що значення виразу $1+5a-(12+3a)+2(3-a)$ не залежить від a .

Відповіді та вказівки

1. $НСД(1680;784)=112$. $НСД(36;72;90)=18$.
2. $НСК(630;560)=5040$.
3. 30.
4. $x=3, y=0$; $x=7, y=5$.
5. Букетів 19: 4 тюльпани, 6 ромашок, 5 волошок.
6. а) $x=6$; б) $x=4$ або $x=9$.
7. $x=15k+11$.
8. 10.
9. 1) $-\frac{1}{3^7}$; 2) 15.
10. 54.
11. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.
12. $-\frac{363}{10}$.
13. А) $x=\frac{8}{5}, x=-9$; В) Такого a не існує.
14. А) $y=15$; В) $x=2$; С) Такого y не існує.
15. А) $x=-\frac{5}{2}$; В) $x=4, x=-4$; С) $x=0, x=-20$; D) $x=-\frac{4}{5}, x=-2$.
16. $x=\frac{1}{3}$.
17. $x=2, a=\frac{1}{2}$.
18. $a=0$.
19. $a=-4$.
20. Після спрощення вираз дорівнює -5 .