

## Лекція №1

### Повторення алгебри 7 класу.

*Девіз : Пам'ятайте, якщо ви бажаєте навчитися плавати, то сміло заходьте у воду, а якщо бажаєте навчитися розв'язувати задачі, то сміло розв'язуйте їх.*

Д.Пойа.

#### 1.Лінійне рівняння з однією змінною

Означення:

Рівність, що містить змінні (невідомі), називається **рівнянням**.

Рівність, що містить одну змінну (невідому) величину називають **рівнянням з однією змінною**.

Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність називається **коренем рівняння**.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Основні властивості рівнянь:

Властивість 1. У будь-якій частині рівняння можна розкрити дужки або звести подібні доданки.

Властивість 2. Будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Властивість 3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне і те ж, відмінне від нуля число.

Рівняння виду  $ax = b$ , у якому  $a$  і  $b$  – деякі відомі числа, а  $x$  – змінна, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Скільки коренів може мати лінійне рівняння з однією змінною  $ax = b$ ?

Якщо  $a \neq 0$ , то  $x = -\frac{b}{2a}$  – єдиний корінь рівняння;

якщо  $a = 0$  і  $b \neq 0$  – рівняння коренів немає;

якщо  $a = 0$  і  $b = 0$  – рівняння має безліч коренів.

**ПРИКЛАД 1.**

Розв'язати рівняння:  $(a + 9)x = a + 9$

*Розв'язання:*

При  $a = -9$  рівняння набуває вигляду  $0 \cdot x = 0$ . У цьому випадку коренем рівняння буде будь-яке дійсне число. При  $a \neq -9$  корінь рівняння  $x = 1$ .

**ПРИКЛАД 2.**

Розв'язати рівняння:  $\frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \right) = 4x + 2\frac{1}{2}$ .

*Розв'язання:*

$$\frac{2}{9}x - \frac{1}{3} = 4x + 2\frac{1}{2}; \quad \frac{2}{9}x - 4x = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2}; \quad 4x - 72x = 6 + 45; \quad x = -\frac{21}{68}.$$

## ПРИКЛАД 3.

Вранці вкладник зняв з рахунку в банку  $\frac{2}{7}$  усіх грошей, а після обіду - 30% залишку. Після цього на його рахунку залишилося 175 грн. Який був початковий вклад?

*Розв'язання:*

Нехай  $x$  грн. – початковий вклад. Зранку вкладник зняв  $\frac{2}{7}x$  грн., а після обіду:  $\left(x - \frac{2}{7}x\right) \cdot 0,3$  грн. Одержимо рівняння:  $x - \frac{2}{7}x - \left(x - \frac{2}{7}x\right) \cdot 0,3 = 175$  ;  
 $x - \frac{2}{7}x - 0,3x + \frac{3}{35}x = 175$ ;  $\frac{5}{7}x - \frac{3}{10}x + \frac{3}{35}x = 175$ ;  $50x - 21x + 6x = 175 \cdot 70$ ;  
 $x = 350$  (грн.)

## 2. Степінь з натуральним показником.

**Означення:** Степенем числа  $a$  з натуральним показником  $n$ , ( $n > 1$ ) називається добуток  $n$  множників, кожний з яких дорівнює  $a$ :  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ,  $n > 1$   
(Тут  $a$  – основа степеня,  $n$  – показник степеня)

**Властивості:**

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| 1) $a^1 = a, a^0 = 1$ ;        | 4) $(a^m)^n = a^{mn}$ ;                                       |
| 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ; | 5) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ ;                                 |
| 3) $a^m : a^n = a^{m-n}$ ;     | 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$ . |

**Знак степеня з натуральним показником:**

1. Якщо основа степеня  $a = 0$ , то  $a^n = 0$  для будь-якого натурального  $n$ .
2. Якщо  $a > 0$ , то  $a^n > 0$  для будь-якого натурального значення  $n$ .
3. Якщо  $a < 0$  і  $n$  — число парне, то  $a^n > 0$ . Наприклад:  $(-2)^4 = 16$ ,  $(-1)^{100} = 1$ .
4. Якщо  $a < 0$  і  $n$  — число непарне, то  $a^n < 0$ . Наприклад:  $(-3)^3 = -27$ ,  $(-1)^{29} = -1$

## ПРИКЛАД 4.

Обчисліть значення виразу;  $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$ .

*Розв'язання:*  $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 3^{10} \cdot 2^{20}} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 (2+5)}{2^{10} \cdot 3^9 (1+3 \cdot 2)} = \frac{1}{2}$ .

## ПРИКЛАД 5.

Що більше:  $5^{99}$  чи  $2^{234}$ ?

Розв'язання:  $5^3=125$ , а  $2^7=128$ , то  $5^3 < 2^7 \Rightarrow (5^3)^{33} < (2^7)^{33} \Rightarrow 5^{99} < 2^{231}$ ,  $2^{231} < 2^{234} \Rightarrow 5^{99} < 2^{234}$ .

### 3. Цілі вирази

**Цілими раціональними виразами** називаються числові вирази, а також вирази із змінними, які можуть містити дії додавання, віднімання, множення та піднесення змінних до натурального степеня. До цілих раціональних виразів відносяться одночлени та многочлени.

**Означення:** **Одночленом** називають добуток чисел, змінних і їх натуральних степенів.

Наприклад  $6a$ ,  $5ab^2$ ,  $x$ ,  $-3xyz$ .

**Означення:** **Степенем одночлена** називають суму показників степенів усіх буквених множників, що входять в одночлен.

Наприклад, степінь одночлена  $5x^3yz^2$ , дорівнює  $3+1+2=6$ .

**Означення:** **Многочленом** називають алгебраїчну суму кількох одночленів.

Наприклад  $4xy + ab + 3,7bx^2 - 3xy$ .

Члени многочлена, які відрізняються тільки коефіцієнтами, є **подібними**. **Зведення подібних членів** – це спрощення многочлена шляхом заміни суми подібних членів одним членом. Так, у многочлені  $4a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 4ab^2$  подібні перший і третій, також другий і четвертий члени.

Щоб **помножити одночлен на одночлен**, треба перемножити їх коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами.

Наприклад,  $(11a^2y) \cdot (-2ab^2y^2) = -22a^3b^2y^4$ .

Щоб **піднести одночлен до степеня**, треба піднести його коефіцієнт до цього степеня і помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого підноситься одночлен.

Наприклад,  $(-3ab^2x^3)^2 = 9a^2b^4x^6$ .

ПРИКЛАД 6.

Спростити вираз:  $-(-2c^2d^5)^7 \cdot (-\frac{1}{2}c^4d^5)^4$

Розв'язання:

$$-(-2c^2d^5)^7 \cdot (-\frac{1}{2}c^4d^5)^4 = 2^7 c^{2 \cdot 7} d^{5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^4} c^{4 \cdot 4} d^{5 \cdot 4} = 2^{7-4} c^{14+16} d^{35+20} = 8c^{30}d^{55}.$$

Щоб поділити одночлен на одночлен, треба поділити коефіцієнти діленого на коефіцієнт дільника, до знайденої частини приписати множниками кожену букву діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї букви у діленому і дільнику.

$$\text{Наприклад, } (8x^6y^3z^{10}) : (4x^2yz^6) = 2x^4y^2z^4.$$

При додаванні і відніманні многочленів користуються правилом розкриття дужок.

Наприклад,

$$1) (2x^2 - 2x + 5) + (5x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 2x + 5 + 5x^2 + 5x - 3 = 7x^2 + 7x + 2;$$

$$2) (2x^2 - 2x + 5) - (5x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 2x + 5 - 5x^2 - 5x + 3 = -3x^2 - 7x + 8;$$

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба кожен член многочлена помножити на одночлен і одержані одночлени додати.

$$\text{Наприклад, } 3a(a^2 - 3a + ab) = 3a^3 - 9a^2 + 3a^2b;$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожен член одного многочлена помножити на кожен член другого многочлена і одержані члени додати.

$$\text{Наприклад, } (3x - 2) \cdot (2x - 3) = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 = 6x^2 - 13x + 6.$$

Щоб розділити многочлен на одночлен, треба кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати.

$$\text{Наприклад, } (7x^6 - 2x^5 + 3x^2 + 6x) : 2x = 7x^6 : 2x - 2x^5 : 2x + 3x^2 : 2x + 6x : 2x = 3,5x^5 - x^4 + 1,5x + 3.$$

**Розкладанням многочлена на множники** називають подання многочлена у вигляді добутку многочленів. Для цього можна використовувати **формули скороченого множення**:

$$1. a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{Наприклад, } 16a^2 - 9b^2 = (4a - 3b)(4a + 3b).$$

$$2. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Наприклад, } (2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2.$$

$$3. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Наприклад, } (2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$$

$$4. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$\text{Наприклад, } x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

$$5. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Наприклад, } 8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2).$$

## Домашня самостійна робота № 1

№ 1. Розв'яжіть рівняння: 1)  $|x| - 5x = 3$ ; 2)  $7|x| - 2(x + 4) = -9$ .

№ 2. У рівності  $3,5(2x - 1) = 5x + *$  замініть зірочку таким виразом, щоб утворилось рівняння, яке 1) має безліч коренів; 2) не має коренів; 3) має один корінь.

№ 3. При якому значенні змінної набуває найменшого значення вираз: 1)  $x^2 - 13$ ; 2)  $(x + 5)^2 + 2$ ?

№ 4. Обчисліть: 1)  $\frac{5^{17} \cdot (5^4)^5}{(5^4)^{8,5}}$ ; 2)  $\frac{63^{18}}{3^{35} \cdot 7^{17}}$ ; 3)  $\frac{3,1^3 - 1,9^3}{1,55^2 - 0,95^2}$ .

№ 5. Сплав заліза та олова загальною масою 6 кг містить 85 % олова. Скільки заліза треба додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, що містить 68 % олова?

№ 6. Розкладіть на множники:

$$\begin{array}{ll} 1) 12z^5 + 1 - 4z^3 - 3z^2; & 3) p^4 + 4p^3 + 4p^2 - 9; \\ 2) 24c^2d + 12c^2 - 8cd^2 - 4cd; & 4) 2t^3 + 3t^2 + 3t + 1. \end{array}$$

№ 7. Побудуйте графік рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 + (y - 6)^2 = 0; & 3) (x + 1)(y - 2) = 0; \\ 2) (x - 2)^2 + |y + 7| = 0; & 4) 6xy - 9x = 0. \end{array}$$

№ 8. Спростіть:

$$1) \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}; \quad 2) \left( \frac{2x-1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2} + \frac{9x+6}{x^3-8} \right) \cdot \frac{x^2-4}{18}.$$

№ 9. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{l} 1) a + b + c, \text{ якщо } a + b = -6, a + c = 13, b + c = 4; \\ 2) x^2 + x - 4xy - 2y + 4y^2, \text{ якщо } x - 2y = 14; \\ 3) a^2 + b^2, \text{ якщо } a - b = 5, ab = 6; \\ 4) a - b, \text{ якщо } a^3 - b^3 = 4 \text{ і } ab^2 - a^2b = 1. \end{array}$$

№ 10. Який з двох виразів більший:  $\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{55}\right)$  чи  $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{55}\right)$ ? Відповідь поясніть.

№ 11. Доведіть, що вираз  $59^{11} - 10 \cdot 7^{19} + 10 \cdot 7^{20} + 59^{10}$  ділиться:

$$1) \text{ на } 60; \quad 2) \text{ на } 120.$$

№ 12. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні  $n$  значення виразу  $n^4(5n - 2) + n^3(5 + 2n)^2 - 2n(7n^2 + 1)$  кратне 12.

## Відповіді та вказівки

№ 1. 1)  $x = -\frac{1}{2}$ ;      2) немає розв'язків.

№ 2. 1)  $* = 2x - 3,5$ ;  
2)  $* = 2x + t$ , де  $t \neq -3,5$ , наприклад,  $* = 2x - 1$ ;  
3)  $* = px + t$ , де  $p \neq 2$ , а  $t$  – будь-яке число, наприклад,  $* = x - 1000$ , або  $* = 4$ .

№ 3. 1)  $x = 0$ ; 2)  $x = -5$ .

№ 4. 1) 625;      2) 21;      3) 15,288.

№ 5. 1,5 кг.

№ 6. 1)  $(4z^3 - 1)(3z^2 - 1)$ ;      3)  $(p^2 + 2p + 3)(p + 3)(p - 1)$ ;  
2)  $4c(3c - d)(2d + 1)$ ;      4)  $(2t + 1)(t^2 + t + 1)$ .

№ 7. Вказівка: графік рівнянь, що мають виконуватися одночасно, – це спільна частина графіків усіх цих рівнянь; якщо має виконуватися хоча б одне з декількох рівнянь сукупності, то графіком такої умови буде об'єднання графіків усіх рівнянь, які входять до цієї сукупності..

№ 8. 1)  $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$ ;      2)  $\frac{x+2}{6}$ .

№ 9. 1)  $\frac{11}{2}$ ;      2) 210;      3) 37;      4) 1.

№ 10.  $(1 + \frac{2}{3}) \cdot (1 + \frac{2}{5}) \cdot (1 + \frac{2}{7}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{2}{55}) < (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{55})$ .

Вказівка: зведіть вирази у кожних дужках до спільного знаменника.

№ 11. Вказівка: винесіть спільні множники за дужки та скористайтесь властивостями парності чисел.

№ 12. Вказівка: перегрупуйте доданки та скористайтесь властивістю добутку чисел, що стоять у натуральному ряді послідовно.