

Формули скороченого множення

Для розв'язування завдань цієї лекції потрібно пам'ятати деякі формули скороченого множення:

- 1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – різниця квадратів;
- 2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суми;
- 3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат різниці;
- 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сума кубів;
- 5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – різниця кубів;
- 6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суми;
- 7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб різниці;
- 8) * $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab$ – квадрат тричлена.

Часто на різних олімпіадах, турнірах і конкурсах трапляються задачі, в умові яких зустрічається дата проведення таких заходів. Почнемо із такої ж задачі-жарту, для розв'язання якої нам знадобиться застосувати формулу різниці квадратів.

Приклад 1. Знайдіть значення виразу $\frac{(2009 \cdot 2029 + 100)(1999 \cdot 2039 + 400)}{2019^3}$.

Помітимо, що числа 2009 і 2029 «рівновіддалені» від числа 2019, адже $2009 = 2019 - 10$, а $2029 = 2019 + 10$. Те ж саме можна сказати і про пару чисел 1999 та 2039. Тоді, розписавши ці числа подібним чином, отримаємо формулу різниці квадратів.

$$\begin{aligned} & \frac{((2019 - 10)(2019 + 10) + 100)((2019 - 20)(2019 + 20) + 400)}{2019^3} = \\ & = \frac{(2019^2 - 10^2 + 100)(2019^2 - 20^2 + 400)}{2019^3} = \frac{2019^2 \cdot 2019^2}{2019^3} = \\ & = \frac{2019^4}{2019^3} = 2019. \end{aligned}$$

Відповідь: 2019.

Корисним під час розв'язування різних математичних задач є також вміння працювати із так званими «повними квадратами», говорячи про які мають на увазі квадрат суми, квадрат різниці або квадрат тричлена. Причому

потрібно вміти не лише розкласти ці формули (тобто розкривати дужки), але й виділяти за необхідності повний квадрат там, де його, на перший погляд, немає. З цією метою до заданого виразу додають та віднімають від нього потрібний доданок або ж деякий член заданого виразу множать та ділять на потрібне значення.

Приклад 2. Відомо, що $w - j = 8$, а $wj = 5$. Знайдіть значення виразів:

а) $(w + j)^2$; б) $w^4 + j^4$.

а) $(w + j)^2 = w^2 + 2wj + j^2$.

З умови задачі відоме значення різниці $w - j$. Тому з отриманого квадрата суми потрібно виділити квадрат різниці. Для цього віднімемо та додамо до нього $4wj$.

$$w^2 + 2wj + j^2 = w^2 - 2wj + j^2 + 4wj = (w - j)^2 + 4wj = 8^2 + 4 \cdot 5 = 64 + 20 = 84.$$

б) Оскільки четвертий степінь є квадратом другого степеня, перепишемо w^4 і j^4 у вигляді $(w^2)^2$ і $(j^2)^2$ відповідно. Крім того, додавши і віднявши $2w^2j^2$, отримаємо квадрат суми одночленів w^2 і j^2 .

$$w^4 + j^4 = (w^2)^2 + 2w^2j^2 + (j^2)^2 - 2w^2j^2 = (w^2 + j^2)^2 - 2(wj)^2.$$

Щоб перетворити отриманий вираз у зручний для обчислення вигляд, від суми квадратів w^2 і j^2 , що знаходиться в перших дужках, віднімемо вираз $2wj$, а потім додамо його. Таким чином отримаємо квадрат відомої нам різниці.

$$(w^2 + j^2)^2 - 2(wj)^2 = (w^2 - 2wj + j^2 + 2wj)^2 - 2(wj)^2 = ((w - j)^2 + 2wj)^2 - 2(wj)^2 = (8^2 + 2 \cdot 5)^2 - 2 \cdot 5^2 = 74^2 - 2 \cdot 25 = 5476 - 50 = 5426.$$

Відповідь: а) 74; б) 5426.

Приклад 3. Відомо, що $a + b + c = 12$ і $ab + bc + ac = -15$. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2 + c^2$.

Маємо, що $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ за формулою квадрата тричлена.

$$\text{Тоді } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 12^2 - 2 \cdot (-15) = 144 + 30 = 174.$$

Відповідь: 174.

Приклад 4. Розкладіть многочлени на множники: а) $x^4 + 2x^2 - 3$; б) $x^4 + 64$; в) $x^3 - 3x - 2$; г) $2x^6 - y^3 + 3x^2y^2 - 3x^4y$.

Для розкладання на множники перших двох пунктів цього завдання достатньо пам'ятати лише формули, що містять квадрати.

а) Подамо x^4 у вигляді $(x^2)^2$ та доповнимо перші два доданки до повного квадрата додаванням та відніманням від нього одиниці.

$$x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 1 - 3 = (x^2 + 1)^2 - 4.$$

Оскільки четвірка є квадратом двійки, то, переписавши її відповідним чином, отримаємо формулу різниці квадратів, за допомогою якої і розкладемо заданий вираз на множники.

$$(x^2 + 1)^2 - 4 = (x^2 + 1)^2 - 2^2 = (x^2 + 1 - 2)(x^2 + 1 + 2) = (x^2 - 1) \times (x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

б) Подамо x^4 і 64 у вигляді $(x^2)^2$ і 8^2 відповідно та доповнимо отримані квадрати їхнім подвоєним добутком.

$$x^4 + 64 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 8 + 8^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 8 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2.$$

Переписавши $16x^2$ як $(4x)^2$, отримаємо формулу різниці квадратів.

$$(x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x).$$

Тричлени, отримані у дужках останнього рядка, не можна розкласти на множники (переконайтеся в цьому самі, застосувавши до них той же підхід, що й до початкового виразу), тому на даному етапі розклад на множники завершений.

Для розв'язування наступних пунктів знадобляться формули скороченого множення, що містять куби.

в) Для розкладання даного виразу на множники достатньо додати до x^3 одиницю та, відповідно, скоригувати останній доданок, замінивши -2 на -3 .

$$x^3 - 3x - 2 = x^3 + 1 - 3x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1 - 3) = (x + 1)(x^2 - 2x - 2).$$

Тричлен у других дужках не розкладається на множники з раціональними коефіцієнтами¹, тому на цьому кроці розклад вважатимемо завершеним.

¹ Розкласти цей вираз на множники ви зможете після вивчення теми «Ірраціональні числа».

г) Щоб застосувати до останнього многочлена формули скороченого множення, подамо доданок $2x^6$ у вигляді $x^6 + x^6$ та виділимо куб різниці.

$$2x^6 - y^3 + 3x^2y^2 - 3x^4y = x^6 + x^6 - y^3 + 3x^2y^2 - 3x^4y = x^6 + ((x^2)^3 - 3(x^2)^2y + 3x^2y^2 - y^3) = (x^2)^3 + (x^2 - y)^3.$$

Для розкладання отриманої суми на множники застосуємо формулу суми кубів.

$$(x^2)^3 + (x^2 - y)^3 = (x^2 + x^2 - y)((x^2)^2 - x^2(x^2 - y) + (x^2 - y)^2) = (2x^2 - y)(x^4 - x^2y + y^2).$$

Відповідь: а) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$; б) $(x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$;
в) $(x + 1)(x^2 - 2x - 2)$; г) $(2x^2 - y)(x^4 - x^2y + y^2)$.

Формули скороченого множення допомагають розв'язувати також і задачі про подільність націло.

Приклад 5. Доведіть, що вираз $357^3 + 143^3$ ділиться націло на 500.

Розкладемо заданий вираз за формулою суми кубів.

$$357^3 + 143^3 = (357 + 143)(357^2 - 357 \cdot 143 + 143^2) = 500(357^2 - 357 \cdot 143 + 143^2).$$

Оскільки при розкладанні ми отримали множник 500, то вираз $357^3 + 143^3$ ділиться націло на 500, що й треба було довести.

Варто зауважити, що під час розв'язування задач на подільність не обов'язково обчислювати значення усіх компонентів, отриманих при виконанні арифметичних перетворень. Наприклад, у прикладі 5 не обчислювалось значення неповного квадрата різниці $357^2 - 357 \cdot 143 + 143^2$, оскільки на відповідь воно жодним чином не впливає.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння: $x^4 - 10x^3 + 250x - 625 = 0$.

Оскільки $625 = 25^2$, то, перегрупувавши доданки, отримаємо у лівій частині рівняння вираз, який досить очевидно розкладається на множники.

$$(x^2)^2 - 25^2 - 10x^3 + 250x = 0;$$

$$(x^2 - 25)(x^2 + 25) - 10x(x^2 - 25) = 0;$$

$$(x^2 - 25)(x^2 + 25 - 10x) = 0;$$

² Порада: для покращення усного рахунку вивчіть таблицю квадратів чисел до 35.

$$(x - 5)(x + 5)(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) = 0;$$

$$(x - 5)(x + 5)(x - 5)^2 = 0;$$

$$(x + 5)(x - 5)^3 = 0.$$

Добуток двох виразів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із цих виразів дорівнює нулю. Тому остання рівність рівносильна тому, що або $x + 5 = 0$, або $(x - 5)^3 = 0$.

Якщо $x + 5 = 0$, то $x_1 = -5$.

Оскільки нулем може бути лише куб нуля, то з рівності $(x - 5)^3 = 0$ випливає, що $x - 5 = 0$, тобто $x_2 = 5$.

Відповідь: $x_1 = -5$; $x_2 = 5$.

Інколи застосування формул скороченого множення є не зовсім очевидним методом розв'язування задачі, але, без перебільшення, корисним та однозначним.

Приклад 7. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких виконується рівність $9^n - 2 \cdot 3^n - 3 = 0$.

Оскільки $9^n = (3^2)^n = (3^n)^2$, то, виділивши у лівій частині рівності квадрат різниці, отримаємо вираз який за допомогою формули різниці квадратів легко розкладається на множники.

$$9^n - 2 \cdot 3^n - 3 = 0;$$

$$(3^n)^2 - 2 \cdot 3^n - 3 = 0;$$

$$(3^n)^2 - 2 \cdot 3^n + 1 - 4 = 0;$$

$$(3^n - 1)^2 - 2^2 = 0;$$

$$(3^n - 1 + 2)(3^n - 1 - 2) = 0;$$

$$(3^n + 1)(3^n - 3) = 0.$$

Добуток двох виразів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із цих виразів дорівнює нулю. Тому або $3^n + 1 = 0$, або $3^n - 3 = 0$.

Якщо $3^n + 1 = 0$, то $3^n = -1$, що неможливо при жодному натуральному значенні n .

Якщо $3^n - 3 = 0$, то $3^n = 3$, тобто $n = 1$.

Відповідь: $n = 1$.

Тренувальні вправи

1. Знайдіть значення виразу $2005^4 - 2004 \cdot 2006 \cdot (2005^2 + 1)$.
2. Відомо, що $d + p = 6$, $dp = -3$. Знайдіть значення виразів: а) $(d - p)^2$; б) $d^4 + p^4$; в) $d^3 + p^3$.
3. Відомо, що $a - b + c = 8$ і $a^2 + b^2 + c^2 = 110$. Знайдіть значення виразу $ac - ab - bc$.
4. Розкладіть многочлени на множники: а) $49c^2 - 21ac + 3a - 14c + 1$; б) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; в) $x^4 - 3x^2 - 4$.
5. Доведіть, що вираз $953^3 - 553^3$ ділиться націло на 200.
6. Розв'яжіть рівняння: $x^4 - 8x^3 + 128x - 256 = 0$.
7. Які натуральні числа n задовольняють рівність $25^n - 2 \cdot 5^n - 575 = 0$?

1. 1. 2. а) 48; б) 1746; в) 270. 3. -23. 4. а) $(7c - 1)(7c - 3a - 1)$; б) $(2x + 1)(x^2 + x + 1)$; в) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 1)$. 6. $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. 7. $n = 2$.

Відповіді

квадрат різниці, а потім розкладіть різницю квадратів на множники.
 Перегрупуйте доданки та розкладіть різницю квадратів на множники. 7. Виділіть у лівій частині рівності
 5. Застосуйте формулу різниці кубів та виділіть необхідний множник з отриманих виразів. 6. $256 = 16^2$.
 доданок у вигляді $x^3 + x^3$, а потім застосуйте формулу куб суми. в) Подайте доданок $-3x^2$ у вигляді $x^2 - 4x^2$.
 4. а) Перегрупуйте доданки та застосуйте формулу квадрата різниці до трьох з них. б) Перепишіть перший
 квадрата тричлена з урахуванням знаків для виразу $a - b + c$. Перенесіть доданки через знак рівності.
 застосування формули суми кубів виділіть квадрат суми у дужках з неповним квадратом. 3. Застосуйте формулу
 суми. б) Виділіть та згорніть квадрат суми. в) Отриманому виразі ще раз виділіть квадрат суми. в) Після
 1. Числа 2004 і 2006 рівновіддалені (на одиницю) від числа 2005. 2. а) Розкрийте дужки та виділіть квадрат

Вказівки до розв'язування тренувальних вправ