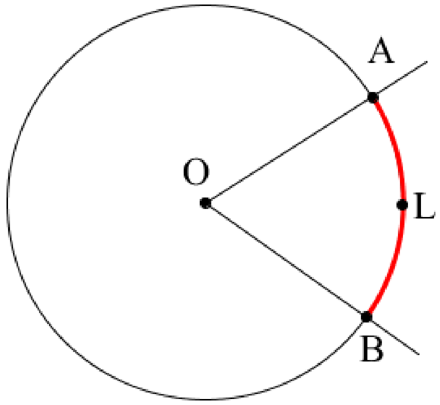
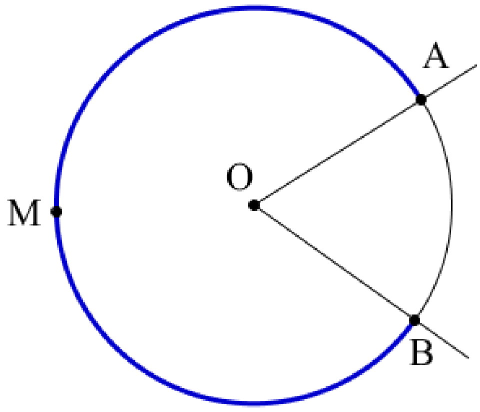
Лекція 4
КОЛО, ЦЕНТРАЛЬНІ І ВПИСАНІ КУТИ , ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ТРИКУТНИКИ ТА ЧОТИРИКУТНИКИ В ЗАДАЧАХ

ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ

Означення. **Центральним кутом** у колі називають кут з вершиною у центрі цього кола.



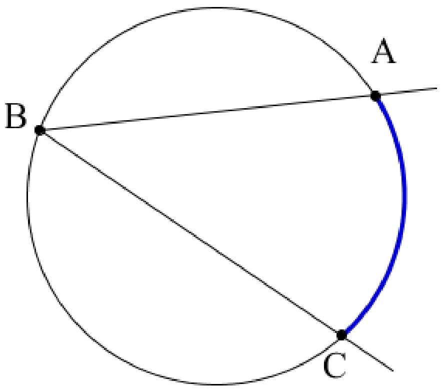
а)



б)

Зауваження. Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A та B – дуга, менша за півколо (рис. а), і дуга, більша за півколо (рис. б). Якщо кут AOB – розгорнутий, то йому також відповідають дві дуги – два півкола.

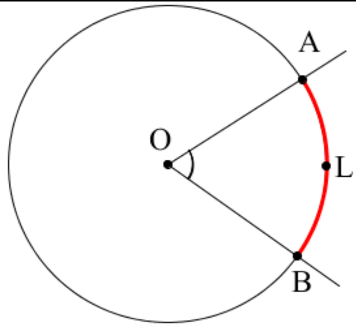
Щоб розрізняти ці дуги, на кожній з них позначають проміжну точку, наприклад, L (рис. а) і M (рис. б). Позначають дуги так: $\cup ALB$ і $\cup AMB$.

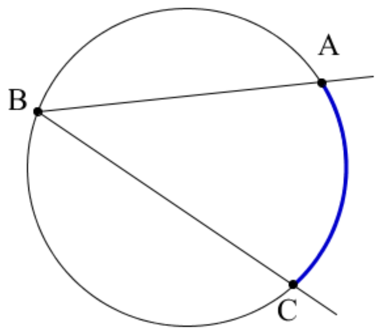


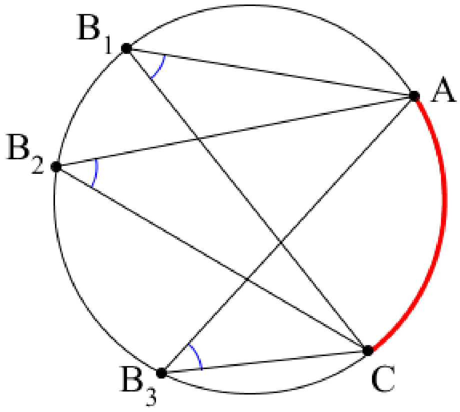
Означення. Кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають його, називається **вписаним кутом**.

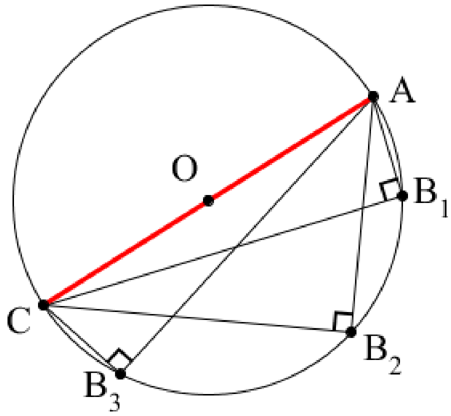
Наприклад, $\angle ABC$ – вписаний

<u>ВЛАСТИВОСТІ ЦЕНТРАЛЬНИХ ТА ВПИСАНИХ КУТІВ</u>

<table>
<tr><th>Назва</th><th>Малюнок</th><th>Формулювання</th></tr>
<tr>
<td>градусна міра центрального кута</td>
<td>


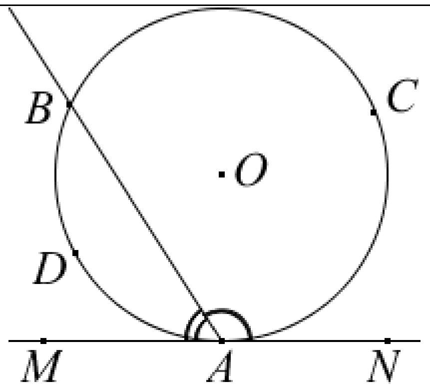
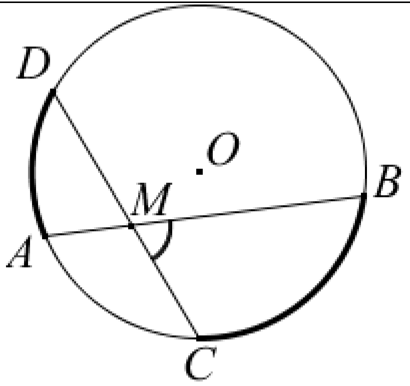
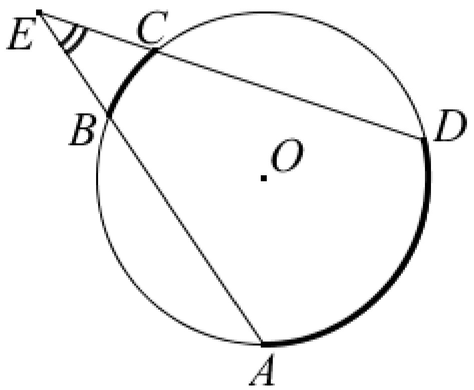
$\angle AOB$ – центральний $\Rightarrow$
$\angle AOB = \smile ALB$
</td>
<td><u>Теорема</u>. Градусна міра центрального кута дорівнює градусній мірі дуги, на яку він спирається.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">градусна міра вписаного кута</td>
<td>


$\angle ABC$ – вписаний $\Rightarrow$
$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$
</td>
<td><u>Теорема</u>. Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.</td>
</tr>
<tr>
<td>


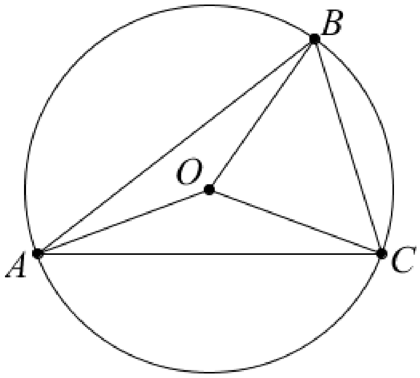
$\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C$
</td>
<td><u>Наслідок 1</u>. Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні.</td>
</tr>
<tr>
<td>


$\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = 90°$
</td>
<td><u>Наслідок 2</u>. Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо) - прямий.</td>
</tr>
</table>

КУТ МІЖ ХОРДОЮ І ДОТИЧНОЮ.
КУТИ МІЖ ХОРДАМИ ТА СІЧНИМИ

Назва	Малюнок	Формулювання
градусна міра кута, утвореного дотичною і хордою, які мають спільну точку на колі	 MA – дотична, A – точка дотику, AB – січна, тоді $\angle MAB = \frac{1}{2} \smile ADB,$ $\angle NAB = \frac{1}{2} \smile ACB$	Теорема. Градусна міра кута, утвореного дотичною і хордою, які мають спільну точку на колі, дорівнює половині градусної міри дуги, що лежить всередині цього кута.
градусна міра кута з вершиною всередині кола	 $\angle CMB = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile BC)$	Теорема. Градусна міра кута з вершиною всередині кола дорівнює півсумі градусних мір двох дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша – між продовженнями сторін.
градусна міра кута між двома січними, які перетинаються зовні кола	 $\angle AED = \frac{1}{2}(\smile AD - \smile BC)$	Теорема. Градусна міра кута між двома січними, які перетинаються зовні кола, дорівнює піврізниці градусних мір більшої і меншої дуг, що містяться між його сторонами.

ОПИСАНЕ І ВПИСАНЕ КОЛО ТРИКУТНИКА



Означення. Коло називається **описаним** навколо трикутника, якщо воно проходить через всі вершини трикутника.

Теорема. Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.

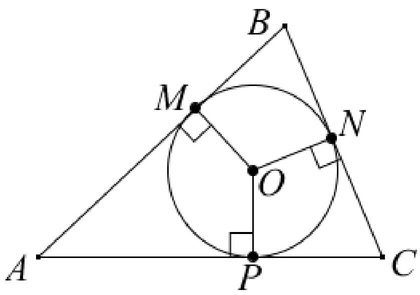
Теорема. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Означення. **Серединний перпендикуляр** – пряма, що проходить через середину відрізка, перпендикулярно до нього.

Зауваження. Серединний перпендикуляр – це геометричне місце точок, що знаходяться на однаковій відстані від кінців відрізка.

Теорема. Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Теорема. Центр кола, описаного навколо трикутника, – це точка перетину серединних перпендикулярів його сторін.



Означення. Коло називається **вписаним** у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема. Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

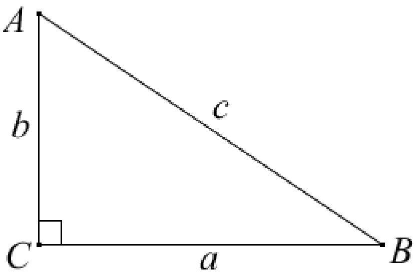
Теорема. У будь-який трикутника можна вписати коло.

Зауваження. Бісектриса – це геометричне місце точок, що знаходяться на однаковій відстані від сторін кута.

Теорема. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Теорема. Центр кола, вписаного в трикутник, – це точка перетину бісектрис.

Вписане і описане коло прямокутного трикутника



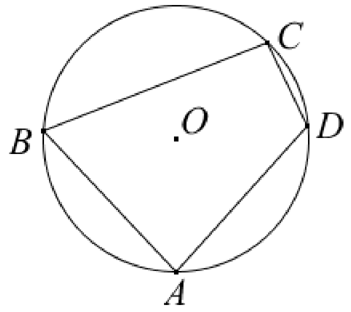
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

$$R = \frac{c}{2}$$

де r - радіус вписаного кола, R – радіус описаного кола.

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Означення. Чотирикутник називається **вписаним**, якщо існує коло, якому належать всі його вершини.



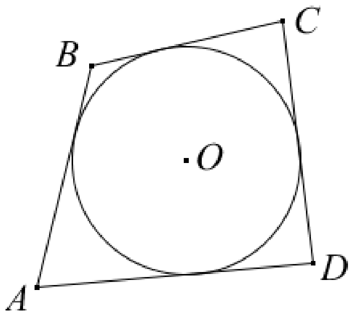
Зауваження. На мал. чотирикутник $ABCD$ – вписаний.

Теорема. (***необхідна і достатня умова вписаного чотирикутника***) Для того, щоб чотирикутник був вписаним необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала $180°$.

Тобто $ABCD$ – вписаний $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

Зауваження. Якщо чотирикутник є вписаним, то існує точка, яка рівновіддалена від усіх його вершин (центр описаного кола). Тобто у вписаного чотирикутника всі 4 серединних перпендикуляри будуть перетинатись в одній точці.

Означення. Чотирикутник називається **описаним**, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.



Зауваження. На мал. чотирикутник $ABCD$ – описаний.

Теорема. (***необхідні і достатня умова описаного чотирикутника***) Для того, щоб чотирикутник був описаним необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних сторін були рівними.

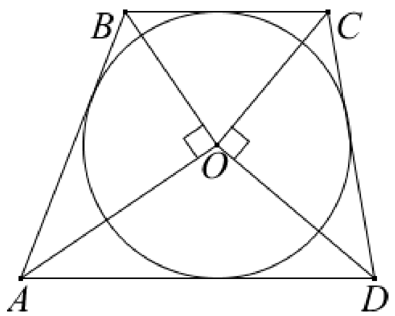
Тобто $ABCD$ – описаний $\Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$

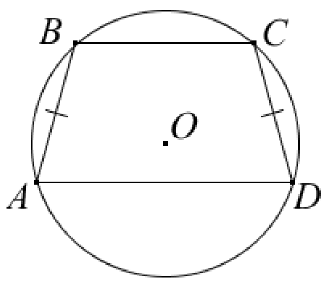
Зауваження. Якщо чотирикутник є описаним, то існує точка, яка рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Тобто у вписаного чотирикутника всі 4 бісектриси будуть перетинатись в одній точці.

Трапеція та вписане і описане коло

Твердження. Якщо в трапецію можна вписати коло, будь-яку її бічну сторону видно з центра вписаного кола під прямим кутом.

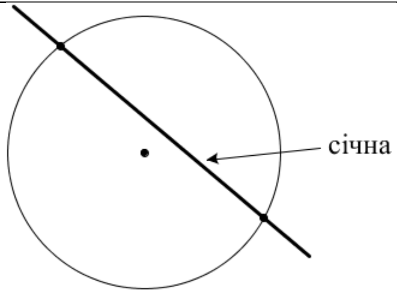
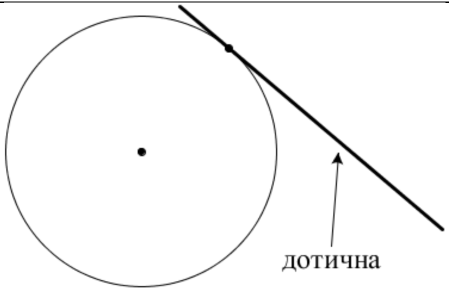
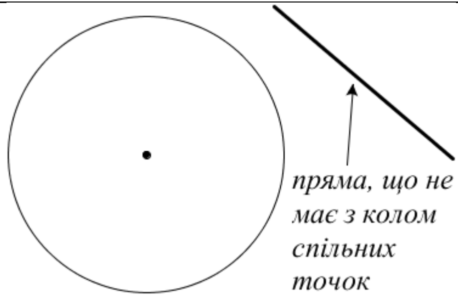
Якщо в трапецію можна вписати коло, то її висота дорівнює діаметру вписаного кола.





Твердження. Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна.

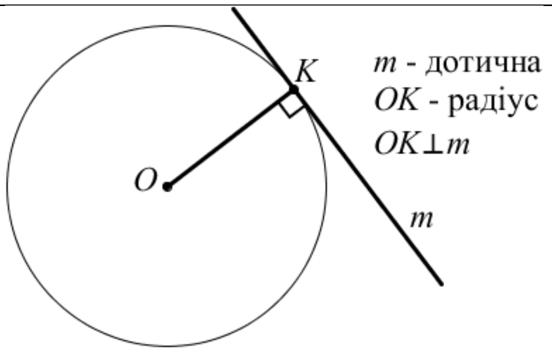
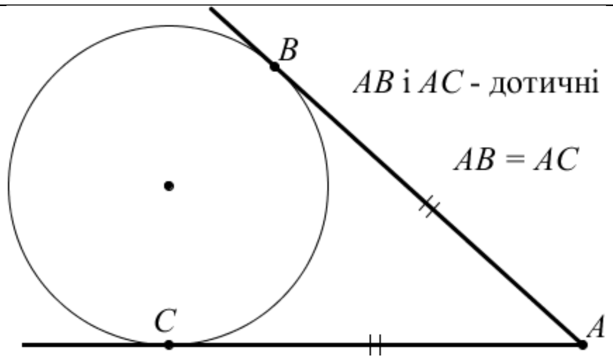
<u>ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ КОЛА І ПРЯМОЇ. ДОТИЧНА ДО КОЛА</u>

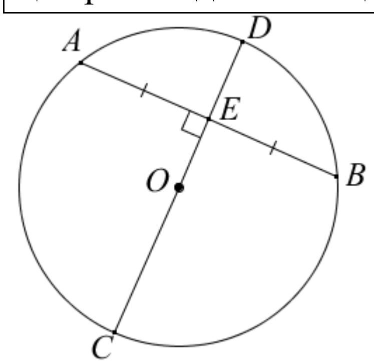
Пряма і коло можуть		
перетинатися	**Дотикатися**	**не перетинатися**
коло і пряма мають дві спільні точки	коло і пряма мають одну спільну точку	коло і пряма не мають спільних точок
		

<u>Означення</u>. **Дотична** – це пряма, яка має з колом одну спільну точку.

<u>Означення</u>. **Січна** – це пряма, яка має з колом дві різні спільні точки.

<u>Властивості дотичної</u>

Малюнок	**Формулювання**
	<u>Теорема</u>. Радіус, проведений в точку дотику перпендикулярний до дотичної.
	<u>Теорема</u>. Дотичні, проведені, з однієї точки, рівні.
<u>Теорема</u>. Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.	
<u>Теорема</u>. Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.	



<u>Теорема</u>. Діаметр, що перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл

<u>ЗАДАЧІ</u>

№ 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша – між продовженнями сторін.

№ 2. Довести, що кут, утворений дотичною і хордою, які мають спільну точку на колі, вимірюються половиною дуги, що лежить всередині цього кута.

№ 3. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

№ 4. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

№5. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

№ 6. Дано кут AOB. Із точки O як із центра проведено коло радіусом $OA = OB = R$. Пряма BC перетинає пряму AO в точці D так, що $CD = R$. Довести, що $\angle AOB = 3\angle ADB$.

№ 7. Дано коло, центр якого невідомий. Побудовою знайдіть центр цього кола.

№ 8 Висота AH і медіана AM трикутника ABC, утворюють рівні кути із сторонами AB і AC . Знайти радіус кола, описаного навколо ΔABC, якщо $AM = m$.

№ 9. З довільної точки M катета BC прямокутного ΔABC опущено перпендикуляр MD на гіпотенузу AB. Довести, що $\angle MAD = \angle MCD$.

№ 10. $ABCD$ – описана трапеція $(AD \parallel BC)$. Знайти відношення середньої лінії до периметра цієї трапеції.

№ 11. У ΔABC проведено бісектриси BL_2 та AL_1. Відрізок L_1L_2 лежить на бісектрисі кута AL_1C. Знайти величину кута BAC.

№ 12. Діагональ трапеції дорівнює 20 см. Навколо трапеції описано коло. Бічну сторону видно з центра кола під кутом $120°$. Знайдіть середню лінію трапеції.

№ 13. Навколо трикутника ABC описано коло з центром в O. Коло, яке проходить через точки A, B і O, дотикається до прямої AC у точці A. Відомо що $\angle ACB = 80°$ знайти $\angle ABC$.

№ 14. Точки O і C розміщені в одній півплощині відносно прямої AB. Відомо, що $AO = BO$ і $\angle AOB = 2\angle ACB$. Доведіть, що точки A, B і C лежать на колі з ценром у точці O.

№ 15. Точки O і C розміщені в різних півплощинах відносно прямої AB. Відомо, що $AO = BO$ і $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$. Доведіть, що точки A, B і C лежать на колі з ценром у точці O.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №4

№ 1. В коло вписано трапецію, вершини якої ділять коло на дуги, що відносяться, як 2 : 7 : 20 : 7. Знайти кути трапеції.

№ 2. Доведіть, що в чотирикутнику, описаному навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.

№ 3. Нехай a і b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, r – радіус вписаного кола. Доведіть, що радіус r можна обчислити за формулою

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

№ 4. Доведіть, що в будь-якому прямокутному трикутнику гіпотенузу видно з інцентра (центра вписаного кола) під кутом $135°$.

№5. Трапеція $ABCD$ – описана, $AB = CD$. Кут при меншій основі дорівнює $150°$. Знайти середню лінію трапеції, якщо її висота дорівнює 11 см.

№ 6. **Теорема про трилисник** (або лема про тризубець). Якщо продовження бісектриси кута А перетинає описане навколо трикутника АВС коло в точці W, то справедлива рівність $WB = WC = WO = WI$, де O — центр зовнівписаного в трикутник АВС кола, яке дотикається до сторони ВС, а I – інцентр трикутника АВС

№ 7. В рівнобедреному трикутнику центри вписаного і описаного кіл симетричні відносно основи трикутника. Які величини кутів цього трикутника?

№ 8. Вершини чотирикутника $ABCD$ лежать на колі, причому АВ – діаметр, а сторона CD рівна радіусу. Знайти кут між продовженнями двох інших сторін.

№ 9. Навколо трикутника АВС описано коло. Через точку А проведено дотичну, яка перетинає продовження сторони ВС (за точку В) у точці D. На стороні ВС взято точку Е, таку, що трикутник ADE рівнобедрений з основою АЕ. Відомо, що $\angle C = 40^\circ$, $\angle ADE = 80^\circ$. Доведіть, що АЕ бісектриса кута ВАС.

№ 10. У ΔABC BH_2 і CH_3 – висоти, M_1 – середина BC і $BC = a$. Чому дорівнює сума відстаней від точок H_2 і H_3 до точки M_1?

Вказівка: розгляньте коло, описане навколо трикутників BH_2C та BH_3C.

Відповідь: a.

№ 11. В прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, в 4 рази менша за гіпотенузу. Які величини гострих кутів цього трикутника?

Вказівка: проведіть медіану з вершини прямого кута.

Відповідь: $15°; 75°$.

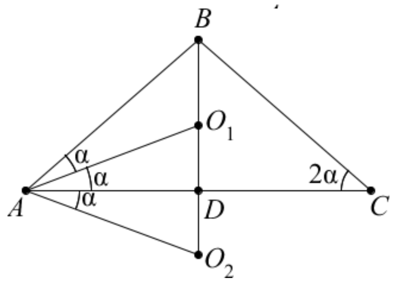
ВКАЗІВКИ ТА ВІДПОВІДІ:

№1 *Відповідь:* $45°, 135°, 135°, 45°$.

№2, №3. *Вказівка: скористатися властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї і тієї ж точки.*

№4. *Вказівка: знайти залежність шуканого кута від кута в 90^0.*

№7. *Скористатися властивістю інцентра та центра описаного кола. Скористатися мал. Відповідь*: $36°, 36°$ *і* $108°$.



№8. *Скористатися формулою обчислення кута між двома січними. Відповідь:* $60°$.

№10. *Вказівка: розгляньте коло, описане навколо трикутників* BH_2C *та* BH_3C. *Відповідь:* a.

№11. *Вказівка: проведіть медіану з вершини прямого кута.*

Відповідь: $15°; 75°$.