Очна школа УФМЛ КНУ ім. Т.Шевченка

<u>Лекція 5</u>

Подільність чисел.

Подільність націло. Ознаки подільності.

<u>Означення</u>: Говорять, що ціле число a **ділиться** на ціле число b ($b \neq 0$) , якщо існує число k таке, що $a = kb$.

При цьому a – кратне b, b – дільник a, а k – частка.

<u>Основні властивості подільності:</u>

1) Якщо $a \neq 0$, то $a \vdots a$;
2) Якщо $a \neq 0$, то $0 \vdots a$;
3) Якщо $a \vdots b$, то $ka \vdots b, k \in Z$;
4) Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$;
5) Якщо $a \vdots m$ і $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$;
6) Якщо $a \vdots c$ І $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$;

<u>Доведення 6):</u> $a \vdots c \to a = kc, b \vdots c \to b = mc \to (a \pm b) = (k \pm m)c$.

<u>Приклад 1:</u> $n \vdots 5$. Довести, що $(n^2 + 15n) \vdots 25$.
$\prec n \vdots 5 \to n = 5k;\ n^2 + 15n = 25k^2 + 75k = 25(k^2 + 3k) = 25k_1 \succ$

<u>Приклад 2:</u> $c \vdots 4,\ d \vdots 4$. Довести, що $6c + 4d \vdots 24$.
$\prec c \vdots 4 \to c = 4k_1 \to 6c = 24k_1;\ d \vdots 6 \to d = 6k_2 \to 4d = 24k_2$. Додаємо вирази $6c + 4d = 24\ (k_1 + k_2) = 24k \succ$

<u>Приклад 3:</u> $a \vdots c,\ a + b \vdots c$. Довести, що $b \vdots c$.
$\prec a \vdots c \to a = k_1 c$; $a + b \vdots c \to a + b = k_2 c$. Віднімаємо вирази $b = (k_2 - k_1)c = kc \succ$

<u>Приклад 4:</u> a і b цілі числа такі, що $(a + 3) \vdots 13,\ (b + 29) \vdots 13$. Довести, що $a - b \vdots 13$.
$\prec (a + 3) \vdots 13 \to a + 3 = 13k_1 \to a = 13k_1 - 3$; $(b + 29) \vdots 13 \to$
$b + 29 = 13k_2 \to b = 13k_2 - 29$. Віднімаємо вирази $a - b = 13(k_1 - k_2) + 26 = 13k \succ$

<u>Приклад 5:</u> Довести, що $\left(\overline{ab} + \overline{ba}\right) \vdots 11$
$\prec \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b) \vdots 11 \succ$

<u>Приклад 6:</u> Знайти всі пари цілих чисел , що задовольняють рівняння: $3x^2 - 4xy + y^2 = 3$.

$\lessdot$ $3x^2 - 4xy + y^2 = 3x^2 - 3xy - xy + y^2 = 3x(x-y) - y(x-y) =$ $(x-y)(3x-y) = 3$. Оскільки x і y – цілі, то і вирази $(x-y)$ і $(3x-y)$ – цілі і є дільниками числа 3. Маємо можливі варіанти значень цих виразів:

$\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases} \rightarrow x=1, y=0$; $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \rightarrow x=-1, y=-4$;
$\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x-y=-3 \end{cases} \rightarrow x=-1, y=0$; $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \rightarrow x=1, y=4.$

Відповідь: $(1;0)$; $(-1;-4)$; $(-1;0)$; $(1;4)$ $\gtrdot$

Ділення з остачею.

Теорема про ділення з остачею:

Для будь-якого цілого числа a і натурального числа b існує єдина пара цілих чисел p і r таких, що $a = bq + r$ $(0 \le r < b)$. Тут r – остача, b – неповна частка, якщо $r \neq 0$.

! Якщо цілі числа a і b при діленні на натуральне число n дають однакові остачі, то $(a-b) \vdots n$.

! Якщо цілі числа a і b такі, що $(a-b) \vdots n$, то числа a і b дають однакові остачі при діленні на n.

! Якщо цілі числа a і b при діленні на натуральне число m, то кажуть, що вони рівні по модулю m. Позначається $a \equiv b (mod\ m)$.

Приклад: $7 \equiv 2 (mod\ 5)$; $-1 \equiv 6 (mod\ 7)$; $15 \equiv 0 (mod\ 3)$.

Властивості:

1. $a \equiv b (mod\ m) \rightarrow a + c \equiv b + c\ (mod\ m)$;
2. $a \equiv b (mod\ m) \rightarrow ac \equiv bc\ (mod\ m)$;
3. $a \equiv b (mod\ m)$ і $c \equiv d (mod\ m) \rightarrow a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ m)$;
4. $a \equiv b (mod\ m)$ і $c \equiv d (mod\ m) \rightarrow ac \equiv bd\ (mod\ m)$;
5. $a \equiv b\ (mod\ m) \rightarrow a^n \equiv b^n (mod\ m)$.

Приклад 7: Довести, що при будь-якому натуральному n
$$17^n + 25 \cdot 4^n \vdots 13 .$$

$\lessdot$ $17 \equiv 4\ (mod\ 13) \rightarrow 17^n \equiv 4^n\ (mod\ 13) \rightarrow 17^n + 25 \cdot 4^n \equiv 4^n + 25 \cdot 4^n = 26 \cdot 4^n \equiv 0\ (mod\ 13)$ $\gtrdot$

Приклад 8: Знайти остачу від ділення числа 5^{101} на 7.

⊀ $5 \equiv 5\ (mod\ 7);\ 5^2 \equiv 4\ (mod\ 7);\ 5^3 \equiv 6\ (mod\ 7);\ 5^4 \equiv 2\ (mod\ 7);$
$5^5 \equiv 3\ (mod\ 7);\ \ 5^6 \equiv 1\ (mod\ 7);\ \rightarrow\ \ 5^{96} \equiv 1\ (mod\ 7);\ \rightarrow\ \ 5^{101} \equiv 3 (mod\ 7);$
Остача від ділення дорівнює 3.➢

Приклад 9: Знайти остачу від ділення числа $5^{101} + 2^{90}$ на 7.

⊀ $2 \equiv 2\ (mod\ 7);\ 2^2 \equiv 4\ (mod\ 7);\ 2^3 \equiv 1\ (mod\ 7) \rightarrow 2^{90} \equiv 1\ (mod\ 7) \rightarrow$
$\rightarrow\ 5^{101} + 2^{90} \equiv 3 + 1 = 4\ (mod\ 7);$
Остача від ділення дорівнює 4.➢

! Якщо число a – парне, то $a = 2k$; b – непарне, то $b = 2k + 1$ або $b = 2k - 1$.

Приклад 10: Довести, що при будь-якому натуральному n число
$(n^2 - n)(n^2 + 2n)\ \vdots\ 24$.

⊀ $(n^2 - 1)(n^2 + 2n) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ –чотири послідовні натуральні числа : із них одне кратне 2, одне кратне 4 і хоча б одне кратне 3, отже число кратне і числу $2 \times 4 \times 3 = 24$ ➢

Ознаки подільності.

1. Число ділиться на 2 , якщо остання цифра цього числа парна.
2. Число ділиться на 3 , якщо сума цифр цього числа ділиться на 3.
3. Число ділиться на 4 , якщо число із двох останніх цифр ділиться на 4.
4. Число ділиться на 5, якщо воно закінчується на 5 або 0.
5. Число ділиться на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3.
6. Число ділиться на 8 , якщо число із трьох останніх цифр ділиться на 8.
7. Число ділиться на 9 , якщо сума цифр цього числа ділиться на 9.
8. Число ділиться на 10, якщо воно закінчується на 0.
9. Число $\overline{a_{\,n}a_{\,n-1}a_{\,n-2}\dots a_2a_1a_0}$ ділиться на 11, якщо $a_{\,0} - a_1 + a_2 - a_3 \dots = 0$.

<u>Означення</u>: Число називається **простим**, якщо воно ділиться тільки на себе і на 1.
В іншому випадку число називається **складеним**.

Приклад 11: До числа 15 зліва і справа допишіть дві цифри так, щоб отримане число ділилося на 15.

⊀ Запишемо шукане число у вигляді $\overline{a15b}$. Оскільки $15 = 5 \times 3$, то шукане число має ділитися на 5 і на 3. Отже, за ознакою подільності на 5, остання цифра має дорівнювати або $b = 0$ або $b = 5$. У першому випадку число $\overline{a150}$ має ділитися на 3, отже сума $a + 1 + 5 + 0$ має ділитися на 3. Звідси отримуємо можливі значення цифри a: 3, 6 або 9, отримуємо числа: 3150, 6150 і 9150. Для другого значення останньої цифри отримуємо число $\overline{a155}$, яке має ділитися на 3, а значить сума $a+1+5+5$ теж має ділитися на 3. Можливі значення цифри a у цьому випадку: 1, 4 і 7. Отримуємо числа: 1155, 4155, 7155. Відповідь: 3150, 6150 , 9150, 1155, 4155, 7155. ➢

<u>*Приклад 12:*</u> Замініть зірочки на цифри так, щоб число 283*64* ділилось на 44.

⮜ Запишемо шукане число у вигляді $\overline{283a64b}$. Оскільки $44 = 4 \times 11$, то шукане число має ділитися на 4 і на 11. За ознакою подільності на 4 число $\overline{4b}$ має ділитися на 4, що можливо при $b = 0, b = 4, b = 8$. При $b = 0$ число $\overline{283a640}$ має ділитися на 11, тобто сума $0-4+6-a+3-8+2=$ $=-1-a=0$. Отже $a=-1$, що неможливо. При $b=4$ число $\overline{283a644}$ має ділитися на 11, тобто сума $4-4+6-a+3-8+2=3-a=0$. Отже $a=3$. Отримуємо перше число 2833644. При $b=8$ число $\overline{283a648}$ має ділитися на 11, тобто сума $8-4+6-a+3-8+2=7-a=0$. Отже $a=7$. Друге число 2837648.
Відповідь: 2833644, 2837648. ➢

<u>ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ:</u>

1. Числа a і b такі, що $a \vdots 7, b \vdots 3$. Доведіть, що $(6a-14b) \vdots 42$.
2. Доведіть, що а) $\left(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}\right) \vdots 111$; б) $\left(\overline{abc}-\overline{cba}\right) \vdots 99$.
3. Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ є квадратом натурального числа.
4. Розв'яжіть у цілих числах рівняння: а) $3x^2-2xy-y^2=-5$; б) $9x^2-y^2=11$.
5. Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:
   А) $7^n+11\cdot 13^n$ ділиться на 6 ; Б) $3^{3n}+2^{n+3}+6\cdot 2^n$ ділиться на 5.

6. Знайдіть остачу від ділення числа: а) 3^{101} на 7; б) $3^{70}+2^{52}$ на 5.

7. Знайти останню цифру числа 13^{52}.

8. До числа 7392 справа допишіть цифру, щоб отримане число ділилось на 8.

9. Замініть зірочки на цифри так, щоб число 42*4* ділилось націло на 36.

10. Замініть зірочки на цифри так, щоб число 283*64* ділилось націло на 99.

11. Знайти всі цілі числа n такі, щоб число $|n^2-9|$ було простим.