Лекція 6
Функція

Функція – одне з найважливіших понять математики. Вона дає можливість досліджувати і моделювати не тільки стани, а й процеси. Дослідження процесів і явищ за допомогою функцій – один з основних методів сучасної науки.

Площа квадрата залежить від довжини його сторони. Кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає єдине значення його площі.

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення виразу $2x - 1$. Прикладів залежностей і відповідностей можна навести багато. Для науки і практики важливо вміти досліджувати такі відповідності. Їх називають функціональними відповідностями або функціями.

У розглянутих прикладах ідеться про залежність між двома змінними. Одну з них, значення якої вибирають довільно, називають незалежною змінною. Другу змінну, яка залежить від першої, називають залежною змінною.

Правило, за допомогою якого для кожного значення незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної, називають функцією однієї змінної, а відповідну залежність функціональною. Тут і далі під словом «функція» будемо мати на увазі функцію однієї змінної.

Зазвичай, незалежну змінну позначають літерою x, залежну - літерою y, функцію(правило) – літерою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$.

За таких умов незалежну змінну x називають *аргументом функції*, а значення залежної змінної y називають *значенням функції*. Значення функції f, яке відповідає значенню x_0 аргументу x, позначають $f(x_0)$.

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють *область визначення функції*(D_f). Всі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють *область значень функції*(E_f).

***Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної*.**

Розрізняють чотири способи завдання функції: табличний, графічний, аналітичний і словесний(описовий).

1. *Табличний спосіб* задання функції дуже зручний, коли область визначення функції складається зі скінченного числа точок. Функцію задано таблично, коли в одному рядку (або стовпчику) записані всі значення аргументу, а в другому відповідні значення функції.

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2		x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2		y_n

Приклади таких таблиць: таблиця квадратів чисел, таблиця кубів чисел, таблиця основних тригонометричних функцій

Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших пяти натуральних значень х можна задати у вигляді такої таблиці.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

- Область визначення даної функції: 1, 2, 3, 4, 5.
- Область значень даної функції: 1, 3, 5,7, 9.

Табличний спосіб задання функції незручний тільки тим, що таблиця займає багато місця. До того ж, неможливо таблично задати функцію, що складається з нескінченного числа точок. В такому випадку таблиця містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

2. *Аналітичний спосіб* задання функції полягає в тому, що y виражають через x за допомогою формули або аналітичного виразу. Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задано формулою, і при цьому не вказано область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ – множина всіх чисел, а функції $y = \frac{x-3}{2x-6}$– множина всіх чисел, крім 2, оскільки тоді знаменник перетвориться в нуль, а на нуль ділити не можна.

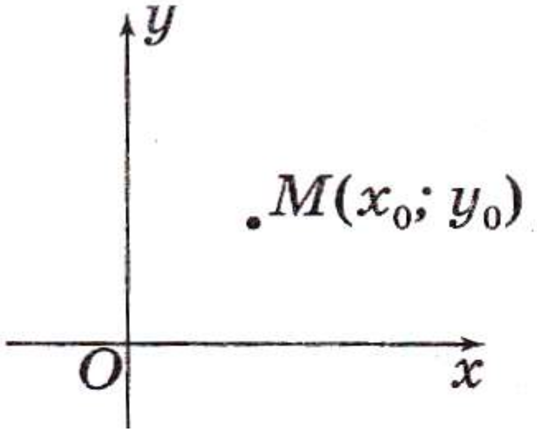
3. *Словесне задання функції* полягає в тому, що відповідність між x та y виражається словами. До словесного способу задання функції належить і такий, коли функція задається

за допомогою кількох формул, кожна з яких діє при певних значеннях аргументу, що доводиться визначати словами.

Наприклад, $y = \begin{cases} 4x - 3, \text{якщо } x < 0; \\ -2x, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$

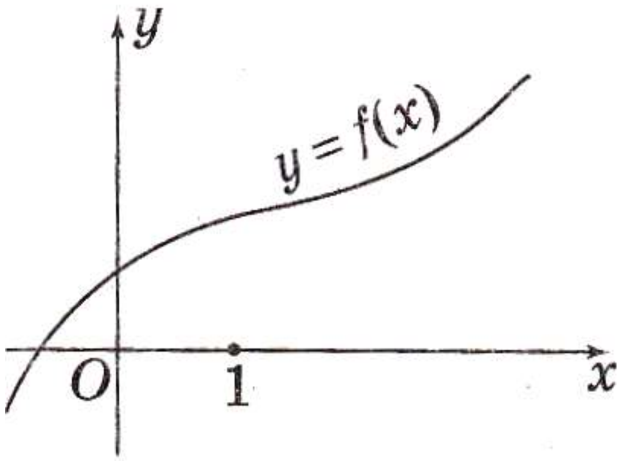
4. *Графічний спосіб* задання функції полягає в тому, що подається графік цієї функції.

Для використання графіків функції використовують прямокутну систему координат xOy. Це сукупність двох взаємно перпендикулярних числових осей зі спільним початком.



Одну з осей – горизонтальну – називають віссю абсцис, віссю іксів, або віссю Ox. Другу, вертикальну вісь, називають віссю ординат віссю ігриків, або віссю Oy.

Числа, що визначають положення точки на координатній площині xOy, називають координатами точки.



Графіком функції $y = f(x)$ називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції f.

Наголосимо, що *коли якась фігура є графіком функції* f, *то виконуються дві умови:*

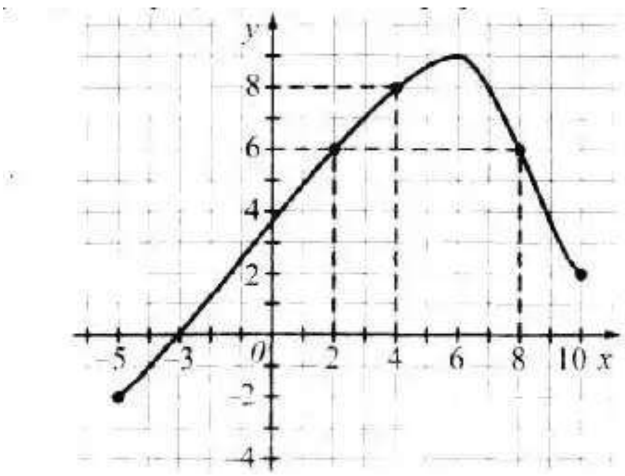
1) якщо x_0 *- деяке значення аргументу, а* $f(x_0)$ *– відповідне значення функції, то точка* $(x_0; f(x_0))$ *обов'язково належить графіку;*

2) якщо $(x_0; y_0)$ – координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 – відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше ніж одну спільну точку.

Абсциси і ординати всіх точок цієї фігури утворюють відповідно область визначення та область значення функції.

<u>Графічний спосіб задання функції</u>



Маючи графік функції, можна знаходити її значення за відомим значенням аргументу і навпаки: знаходити значення аргументу за відомим значенням функції.

Розглянемо, наприклад, функцію, графік якої зображено на рисунку. (Про таку функцію кажуть, що вона задана графічно).

Знайдемо за допомогою графіка значення функції, якщо $x = 4$. Для цього через точку осі Ox з абсцисою 4 проведемо пряму, паралельну осі Oy. Точка її перетину з графіком функції має координати $(4; 8)$. Отже, якщо $x = 4$, то значення функції дорівнює 8. Знайдемо за допомою цього ж графіка значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 6. Для цього через точку осі Oy з ординатою 6 проведемо пряму, паралельну осі Ox. Одержимо дві точки її перетину із графіком функції: $(2; 6)$ і $(8; 6)$. Отже, функція набуває значення 6, якщо $x = 2$ або $x = 8$.

Дивлячись на графік, зображений на рисунку, можна відмітити деякі властивості функції, заданої цим графіком.

1. Область визначення функції утворюють усі значення x, що задовольяють нерівності $-5 \le x \le 10$.

2. Найбільше значення функції дорівнює 9 (цього значення функція набуває, якщо $x = 6$).

3. Найменше значення функції дорівнює -2 (цього значення функція набуває, якщо $x = -5$).

4. Область значень функції утворюють усі значення у, що задовольняють нерівності $-2 \leq y \leq 9$.

5. Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = -3$. *Ті значення аргументу, для яких значення функції дорівнює нулю, називають нулями функції. Отже, значення* $x = -3$ *є нулем даної функції.*

6. Функція набуває додатних значень, якщо $-3 < x \leq 10$; *від'ємних значень* $-5 \leq x < -3$.

За допомогою графіка функції можна знаходити значення функції в інших точках координатної площини. Для цього треба знайти на осі Ox потрібне значення аргументу, відповідну йому точку графіка, і з'ясувати, яку ординату має ця точка графіка.

Якщо графік перетинає вісь абсцис, то можна зробити висновок, що функція набуває значення нуль при x, що дорівнює абсцисам точок перетину з віссю.

За графіком можна з'ясувати, при яких значеннях x функція набуває додатних значень (для яких значень x графік функції лежить вище осі абсцис), і при яких від'ємних значень (для яких значень x графік функції лежить під віссю абсцис).

За графіком можна з'ясувати чи функція зростаюча, чи спадна.

Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції.

Функція називається спадною, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції.

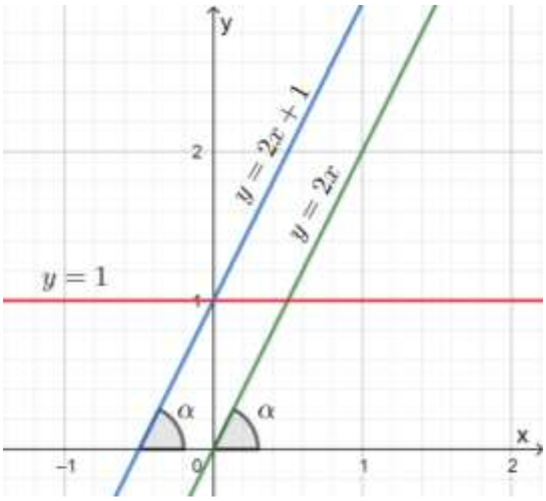
Лінійна функція. Лінійною функцією називають функцію, що задається формулою $y = kx + b$, де x – аргумент; k, b – деякі числа. Графіком лінійної функції є пряма, що утворює з віссю абсцис деякий кут α.

Зауважимо, що *областю визначення лінійної функції є множина всіх чисел.*

Розглянемо часткові випадки побудови графіків лінійної функції.

1. Якщо $b = 0$. Лінійну функцію, задану формулою $y = kx, k \neq 0$, називають *прямою пропорційністю*. Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат. Наприклад, $y = 2x$.

2. Якщо $k = 0$. Графіком функції $y = b$ є пряма лінія, паралельна осі абсцис. Наприклад, $y = 1$.



3. Якщо $k \neq 0$, $b \neq 0$. Графіком функції $y = kx + b$, паралельний графіку $y = kx$, що проходить через точку $(0, b)$. Наприклад, $y = 2x + 1$.

Вправа: Побудувати графік функції $y = \frac{(x-1)^2}{x-1}$.

Графік лінійного рівняння з двома змінними.

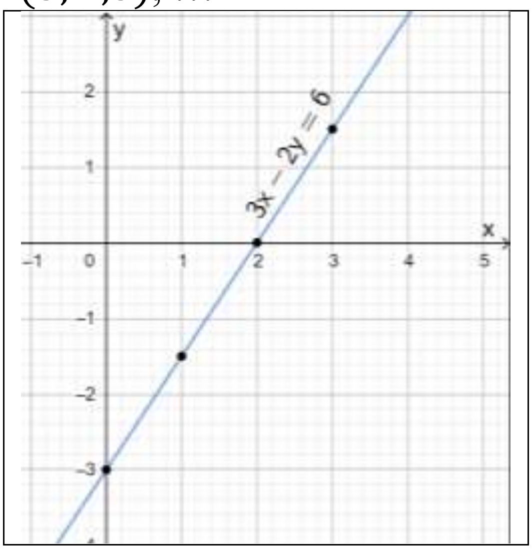
Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y – змінні, a,b, c – деякі числа.

Графіком лінійного рівняння $ax + bx = c$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$[1] є пряма.

Якщо $a = b = c = 0$, тоді будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння.

Якщо $a = b = 0$, $c \neq 0$, тоді рівняння не має розв'язків.

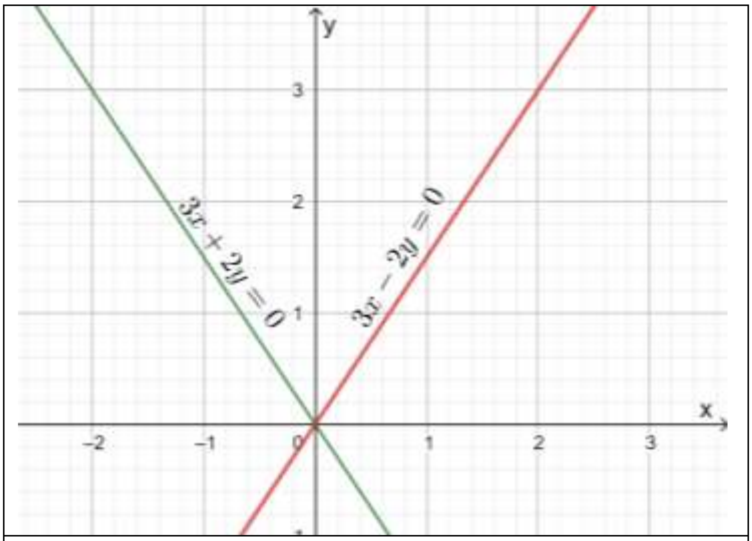
Розглянемо, рівняння $3x - 2y = 6$. Надавши змінній x значень 0, 1, 2, 3,..., знайдемо відповідні значення змінної y. Матимемо розв'язки даного рівняння: $(0; -3)$; $(1; -1{,}5)$; $(2; 0)$; $(3; 1{,}5)$, …



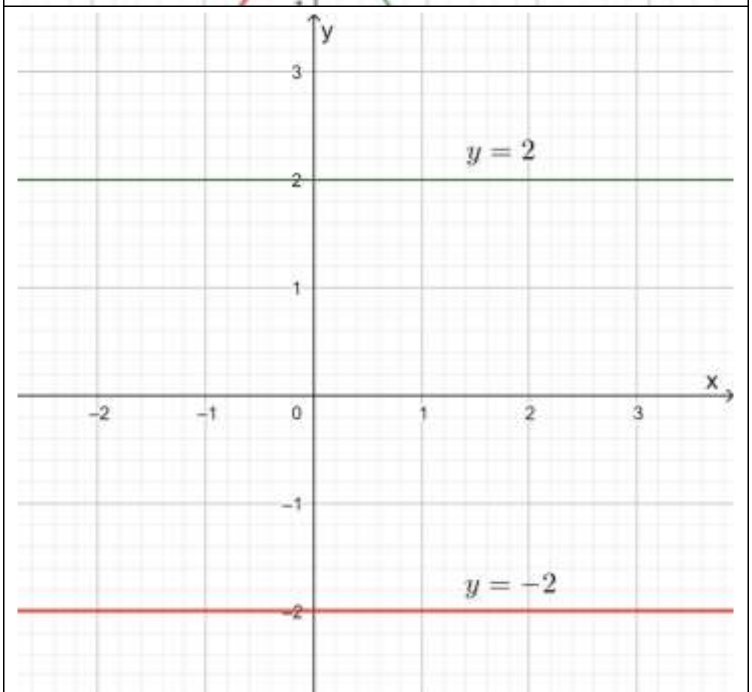
Якщо на координатній площині позначити точки, що відповідають цим парам, виявиться, що всі вони дійсно розміщені на одній прямій.

Якщо a, b і c не дорівнюють нулю, то пряма проходить під кутом до координатних осей і перетинає їх у двох точках

[1] Запис $a^2 + b^2 \neq 0$ означає, що числа a і b не дорівнюють нулю одночасно.

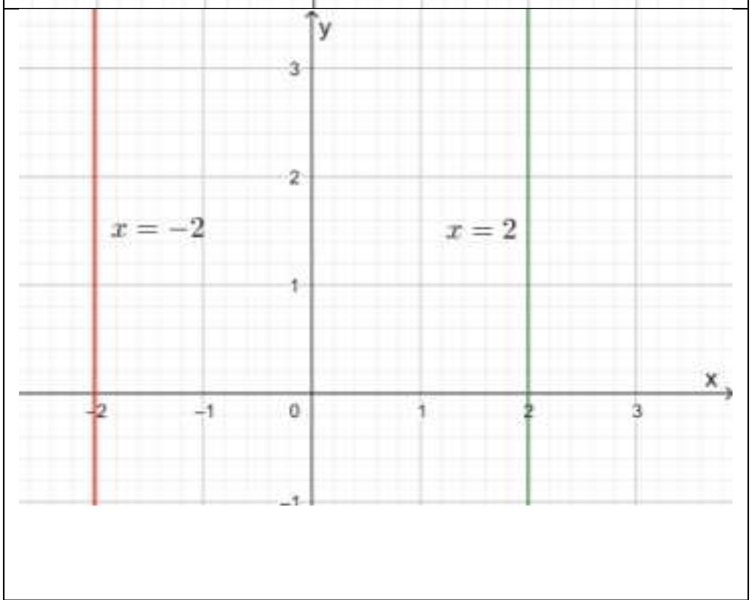


Якщо права частина лінійного рівняння з двома змінними дорівнює нулю, то пряма проходить через початок координат.



Якщо коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, а інші не дорівнюють нулю, то пряма паралельна осі Ox.

Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при y, не дорівнюють нулю, то пряма паралельна осі Oy.



Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при y, дорівнюють нулю, то пряма співпадає з віссю абсцис.

Якщо всі коефіцієнти, окрім коефіцієнта при x, дорівнюють нулю, то пряма співпадає з віссю ординат.

Якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, то графіком будуть усі точки координатної площини.

Якщо всі коефіцієнти, окрім вільного члена, дорівнюють нулю, то не одержимо жодної точки.

Якщо потребується знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, то говорять, що ці рівняння утворюють систему.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Домашнє завдання

№1. Побудуйте графік функції: $y=\begin{cases}2+x,\ x<0\\ 2-x,\ 0\le x\le 2\\ 0,\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$

№2. Побудуйте графік функції: $(x+3)\cdot y=x^2-9$, $y=\frac{2x^3}{x^2}+1$, $y=\frac{x-3}{2x-6}$, $y=\frac{x^2-9}{x+3}+2$, $y=\frac{x^3-8}{x-2}-x^2-x-1$, $y=\frac{x^2-3x}{2x-6}+\frac{x^2-4}{x+2}$, $y=|x-3|+2$

№3.Знайти область визначення функцій: $y=\frac{2x+1}{x-3}$, $y=\frac{5x-2}{4}-\frac{4}{|x|-3}$, $y=\frac{3}{|x|-1}-\frac{x}{x^2-4}$.

№4. При яких значеннях параметра а:

1) Графік функції $y=(a-3)x-9$ проходить через точку А(2;1);
2) Графік функції $y=ax-4+2a$ проходить через точку перетину прямої $y-3x=2$ з віссю абсцис;
3) Графік функції $y=(2a+1)x+a$ перетинає пряму $f(x)=3x-4$ на вісі ординат;
4) Графік функції $y=2x-5+3a$ проходить через точку перетину прямих $y-2x=3$ і $y+x-6=0$;
5) Графік функції $y=(6-5a))x-a+2$ паралельний до вісі абсцис;
6) Графік функції $y=(4a+1)x-6$ паралельний до прямої $f(x)=-7ax+0{,}5$;
7) Графіки функцій $y=(2-5a)x-6-a$ і $y=(2a-3)x-8$ не перетинаються?

№5. Побудуйте графік функції: $y=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{x-3},\ -1\le x\le 4,\\ 5(x-5)^0,\ \ x\ge 4.\end{cases}$

№6.Чи належить графіку рівняння $4x-8y=7$ хоча б одна точка, у якої обидві координати – цілі числа?