Лекція № 6

Функції та їх графіки. Квадратний корінь та його властивості. Від'ємні степені

1. Поняття функції. Графік функції

Означення: Функцією називають певне правило, за яким одній величині (незалежній змінній) однозначно ставиться у відповідність інша величина (залежна змінна).

Функція може бути задана аналітично (формулою), таблично, вербально (словами).

Означення: Областю визначення функції $f(\cdot)$ називається множина $D(f)$ всіх таких значень x, для яких вираз $f(x)$ має сенс.

Означення: Областю значень функції $f(\cdot)$ називається множина $E(f)$ всіх значень $f(x)$, яких набуває вираз $f(x)$ в точках x з множини $D(f)$.

Приклад 1. Знайти області визначення та області значень функцій:

а) $f(x)=1-x$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}+2$.

а) Оскільки функція немає обмежень на область визначення та на область значень, то $D(f)=R$ і $E(f)=R$.

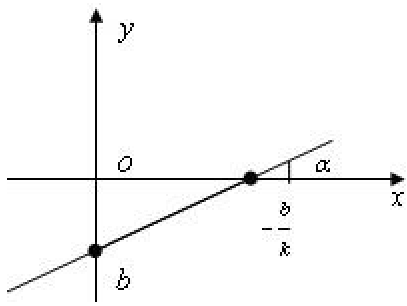
б) Для відповіді на питання потрібні певні алгебраїчні перетворення, що базуються на формулах скороченого множення,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}+2=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+2=x+3, x\neq 1.$$

Тоді, $D(f)=R\setminus\{1\}$ і $E(f)=R\setminus\{2\}$.

Означення: Графіком функції $y=f(x)$ називається множина точок $(x;y)$ на координатній площині xOy, таких що $y=f(x)$.

2. Графік лінійної функції $y=ax+b$



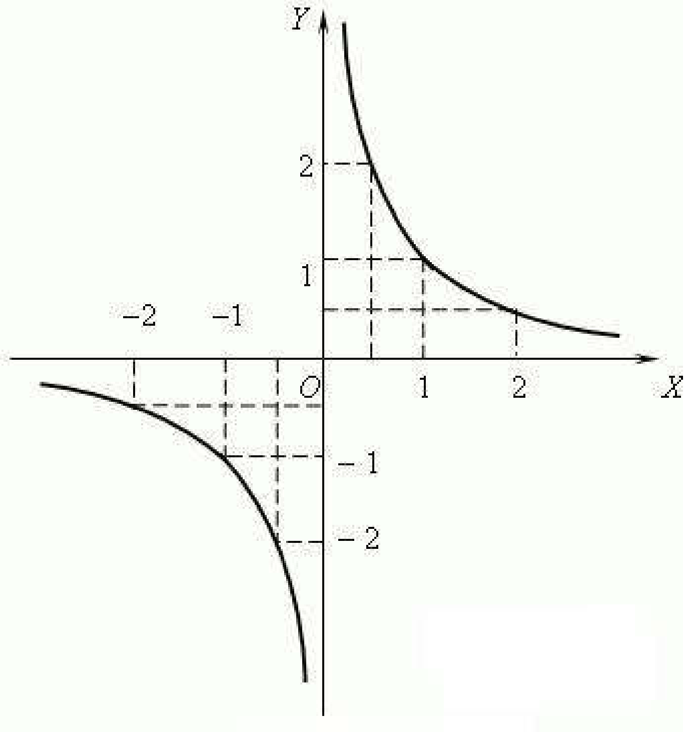
Графіком функції $y=ax+b$ є пряма. Оскільки з аксіом планіметрії будь-які дві точки на площині однозначно визначають пряму, то графік лінійної функції будується абсолютно однозначно після знаходження двох точок $(x_1;y_1)$ та $(x_2;y_2)$, що задовольняють рівняння $y=ax+b$.

Приклад 2. Побудуйте графік $y=3x-1$.

3. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік

Означення: Функцію, яку можна задати формулою виду $y=\dfrac{k}{x}$, де $k\neq 0$ – дійсне число, називають функцією оберненої пропорційності. Її області визначення та значень відповідно мають вигляд: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Функція $y=\frac{k}{x}$ не має нулів, оскільки рівняння $\frac{k}{x}=0$ не має коренів, тому графік функції $y=\frac{k}{x}$ не перетинає вісь Ox. Фігура, що є графіком функції $y=\frac{k}{x}$ називається гіперболою, яка складається з двох віток. Якщо $k>0$, то вітки гіперболи розташовані в I і III координатних кутах (див. мал.), якщо $k<0$, то вітки гіперболи розташовані в II і IV координатних кутах.



Приклад 3. Побудуйте графіки:

а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=-\frac{4}{x}$.

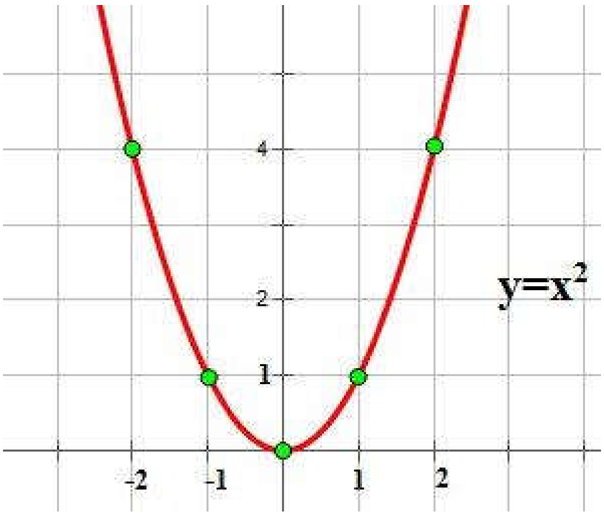
4. Функція $y=x^2$ та її графік

Означення: Функцію, яку можна задати формулою виду $y=ax^2+bx+c$, де $a\neq 0, b, c$ – дійсні числа, називають квадратичною.

На даному етапі ми розглянемо лише частковий випадок квадратичної функції $y=ax^2, a\neq 0$.

Області визначення та значень відповідно мають вигляд: $D(y)=R$ і $E(y)=R$.

Фігура, що є графіком функції $y=x^2$ називається параболою. Точка $O(0;0)$ на параболі називається її вершиною, а частини графіка при $x<0$ та $x>0$, – відповідно її лівою і правою гілками. Вітки параболи направлені вгору, якщо $a>0$; вниз, якщо $a<0$.



Приклад 4. Побудуйте графіки функцій: а) $y=\frac{x^3}{x}$; б) $y=-x^2$.

5. Квадратичний корінь

Нехай a – невід'ємне дійсне число.

Означення: Квадратним коренем числа a називається число b, квадрат якого дорівнює числу a.

Наприклад, квадратним коренем із 49 є число 7 та число -7, бо $7^2=49$ і $(-7)^2=49$.

Означення: Арифметичним квадратним коренем числа a називається невід'ємне число b, квадрат якого дорівнює числу a.

Позначення: $\sqrt{a}$.

Наприклад, $\sqrt{49}=7$, бо $7^2=49$ і $7\geq 0$.

<u>Властивості:</u> Нехай a та b – довільні дійсні числа, n – довільне натуральне число. Справедливі властивості.

1. Якщо $b \ge 0$ і $b^2 = a$, то $\sqrt{a} = b$.
2. Якщо $a \ge 0$, то $\sqrt{a} \ge 0$ і $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; (якщо, $a < 0$ то $\sqrt{-a} \ge 0$ і $\left(\sqrt{-a}\right)^2 = -a$, тобто $a = -\left(\sqrt{-a}\right)^2$).
3. $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.
5. Якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$,то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; (якщо $a < 0$, $b < 0$,то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$).
6. Якщо $a \ge 0$, $b > 0$,то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; (якщо $a < 0$, $b < 0$,то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$).
7. Якщо $a > b \ge 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
8. Якщо $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

<u>Приклад 5.</u> Порівняти значення виразів $\sqrt{50}$ і $6\sqrt{2}$ можна двома способами.

1. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Оскільки $5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}.$. Перетворення, що було виконано з $\sqrt{50}$ називають <u>винесення множника з-під знака кореня</u>.

2. $6\sqrt{2} = \sqrt{36}\sqrt{2} = \sqrt{72}$. Оскільки 50<72, то $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Отже, $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Таке перетворення називають <u>внесенням множника під знак кореня.</u>

<u>Приклад 6.</u> Винести множник з-під знака кореня: а) $\sqrt{a^7}$; б) $\sqrt{(a-5)^3}$, $a \ge 5$

а) Вираз має зміст, якщо $a \ge 0$. Маємо: $\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 a} = \sqrt{\left(a^3\right)^2}\sqrt{a} = |a^3|\sqrt{a} = a^3\sqrt{a}$;

б) Якщо $a \ge 5$, то $a - 5 \ge 0$ і $\sqrt{(a-5)^3} = (a-5)\sqrt{a-5}$.

<u>Приклад 7.</u> Внести множник під знак кореня:

а) $-4\sqrt{x}$; б) $a\sqrt{2}$; в) $(4-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$, $x > 4$; г) $(5-a)\sqrt{\dfrac{1}{25-a^2}}$, $0 < a < 5$.

а) $-4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16}\sqrt{x} = -\sqrt{16x}$;

б) Якщо $a > 0$, то $a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2}\sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$;

якщо $a < 0$, то $a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$;

в) $(4-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-4}} = -(x-4)\sqrt{\dfrac{x}{x-4}} = -\sqrt{\dfrac{(x-4)^2 x}{x-4}} = -\sqrt{x^2 - 4x}$;

г) $(5-a)\sqrt{\dfrac{1}{25-a^2}} = \sqrt{\dfrac{(5-a)^2}{(5-a)(5+a)}} = \sqrt{\dfrac{(5-a)}{(5+a)}}$.

<u>Приклад 8.</u> Спростити вираз: а) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$; б) $\left(3\sqrt{5} - 6\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right)$.

а) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a} = \sqrt{5a}(3 - 2 + 12) = 13\sqrt{5a}$;

б)

$\left(3\sqrt{5} - 6\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\left(\sqrt{5}\right)^2 + 6\sqrt{5 \cdot 2} - 6\sqrt{2 \cdot 5} -$

$-12\left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = 15 - 24 = -9$.

Звільнення від ірраціональності в чисельнику та знаменнику

Заміна дробового виразу, у якого чисельник або знаменник (або обидва) ірраціональні, тотожно рівним йому виразом з раціональним чисельником (знаменником), називають *звільненням від ірраціональності у чисельнику (знаменнику) дробового виразу.*

Часто для звільнення чисельника (знаменника) дробового виразу від ірраціональності чисельник і знаменник цього виразу множать на множник, спряжений з чисельником (знаменником).

Спряженим з ірраціональним виразом A називають будь-який не рівний тотожно нулю вираз B, який у добутку з A не містить знака кореня, тобто $A \cdot B$ – раціональний вираз.

Розглянемо основні випадки звільнення від ірраціональності у знаменниках дробових виразів (аналогічно виконується звільнення від ірраціональності у чисельниках). Якщо є вирази виду $\frac{A}{\sqrt{B}}$, то для звільнення від ірраціональності у знаменнику необхідно чисельник і знаменник помножити на $\sqrt{B}$.

Приклад 9. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику:

а) $\frac{x}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}$; в) $\frac{2}{7\sqrt{y}}$.

а) $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{b}}{b}$; в) $\frac{2}{7\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{7\sqrt{y}\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{7y}$.

Розглянемо вирази виду $\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. Вирази $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ та $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ взаємно спряжені, оскільки $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$. Тому позбавитися від ірраціональності у знаменнику можна такими перетвореннями:

якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a \ne b$, то $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a \ne b$, то $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

якщо $a > 0$, $a = b$, то $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}$.

Приклад 10. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику: а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}$.

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$;

б) $\frac{5}{4-\sqrt{11}} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} = 4+\sqrt{11}$.

Розглянемо вирази виду $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Помноживши знаменник на $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, одержимо у знаменнику: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) = a+b-c+2\sqrt{ab}$. Помноживши далі одержаний вираз на $a+b-c-2\sqrt{ab}$, матимемо: $\left(a+b-c+2\sqrt{ab}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right) = (a+b-c)^2-4ab$, тобто звільняємося від ірраціональності у знаменнику. Зрозуміло, що на вказані вирази помножити необхідно одночасно чисельник і знаменник дробу.

Аналогічно звільняємося від ірраціональності в знаменниках дробів виду $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ та $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

ПРИКЛАД 11. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+2}$.

а) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}{4}.$$

б) $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+2}=\frac{1\cdot(\sqrt{3}+2-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2-\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{7+4\sqrt{3}-5}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{2(1+2\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{3}+2-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-1)}{2(12-1)}=\frac{(\sqrt{3}+2-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-1)}{22}.$$

Для розв'язання наступних прикладів треба пам'ятати такі формули скороченого множення:

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|=\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, де $a\geq 0, b\geq 0$.

ПРИКЛАД 12. Спростити вираз: а) $\sqrt{11+\sqrt{40}}$; б) $\sqrt{17+2\sqrt{30}}$; в) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}$; г) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

а) Помітимо, що вираз $11+\sqrt{40}$ можна подати у вигляді квадрату суми.

Дійсно, $11+\sqrt{40}=11+2\sqrt{10}=\left(\sqrt{10}\right)^2+2\sqrt{10}+1=\left(\sqrt{10}+1\right)^2$.

Тому $\sqrt{11+\sqrt{40}}=\sqrt{\left(\sqrt{10}+1\right)^2}=\left|\sqrt{10}+1\right|=\sqrt{10}+1$.

б) Помітимо, що вираз $17+2\sqrt{30}$ можна представити у вигляді квадрату суми.

Дійсно, $17+2\sqrt{30}=15+2\sqrt{15}\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{15}+\sqrt{2}\right)^2=\left|\sqrt{15}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{15}+\sqrt{2}$.

Тому $\sqrt{17+2\sqrt{30}}=\sqrt{\left(\sqrt{15}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{15}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{15}+\sqrt{2}$.

в) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}=\sqrt{17-2\sqrt{17}\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{17}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{17}-\sqrt{2}$.

г) $$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3}\cdot 1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

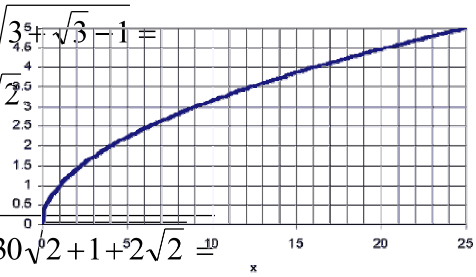
ПРИКЛАД 13. Спростити вираз:

а) $A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$; б) $A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$; в) $A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

а) $$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9+2+2\cdot 3\sqrt{2}}-\sqrt{3+2+2\sqrt{3\cdot 2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{5+1+2\sqrt{5\cdot 1}}-\sqrt{5+2+2\sqrt{5\cdot 2}}}=\frac{\sqrt{3}+3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}-\sqrt{2}}=3;$$

б)

$$A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+2\sqrt{12}}}}=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12+1+2\sqrt{12}}}}=$$
$$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12}-1}}=2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=2\sqrt{3+\sqrt{3+1-2\sqrt{3\cdot 1}}}=2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}=$$
$$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6+2+2\sqrt{12}}=\sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$



в)

$$A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+1+2\sqrt{8\cdot 1}}}}=\sqrt{13+30\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}}=$$
$$=\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{43+2\sqrt{450}}=\sqrt{25+18+2\sqrt{25\cdot 18}}=5+\sqrt{18}=5+3\sqrt{2}.$$

6. Графік функції $y=\sqrt{x}$

Область визначення $D(y)=[0;+\infty)$.
Область значень $E(y)=[0;+\infty)$.
Графік функції проходить через початок координат і міститься у I чверті.

7. Від'ємні степені

Відоме означення степеня із натуральним показником можна узагальнити наступним чином.

Означення: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, де n – натуральне, $a\neq 0$, зокрема $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

Властивості степеня з натуральним показником будуть справедливі і для степеня з від'ємним показником. Згадаємо ці властивості.

Властивості: Для довільних не нульових a,b та будь-яких цілих n,m виконується:

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.
2. $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.
3. $(ab)^n=a^nb^n$.
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.
5. $(a^n)^m=a^{nm}$.

Зауважимо, що $a^0=1$, де $a\neq 0$.

Приклад 14. Спростити: а) $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$; б) $(-2)^{-5}=\dfrac{1}{(-2)^5}=-\dfrac{1}{32}$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}+(-1{,}7)^0-2^{-3}=\dfrac{3}{2}+1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{12+8-1}{8}=\dfrac{19}{8}$;

г) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):(a+b)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right):(a+b)=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}:(a+b)=\frac{b-a}{a^2b^2}$;

д) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3}\cdot\left(-6a^2b^9\right)^{-2}=\left(-6^3a^2b^{18}\right)\cdot\left(\frac{1}{6^2}a^{-4}b^{-18}\right)=-6a^5b^0=-6a^5$;

е) $\frac{1}{a^{-2}}\left(a^2-b^2\right)^{-1}\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-1}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{a}+\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$.

<u>Приклад 15.</u> Порівняти значення виразів $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ та $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=3+4=7>\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{3+4}{12}\right)^{-1}=\frac{12}{7}$.

Домашня самостійна робота № 3

Знайдіть область визначення функцій: 1) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$; 2) $y=\frac{3x-1}{3x+1}$; 3) $y=\frac{x}{x^3+x}$.

2. Побудуйте графіки функцій: 1) $y\cdot x=0$; 2) $\left(x^2-1\right)(y+3)=0$; 3) $y=\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$.

3. Побудуйте графік рівняння:

1) $(xy+1)(y-1)=0$; 2) $\frac{xy+1}{x+y}=0$; 3) $(y-x)^2+\left(y-x^2\right)^2=0$.

4. Графік $y=7-3x$ проходить через точку $A(a,4)$. Не виконуючи побудови, знайти a.

5. Не виконуючи побудови, знайти точки перетину з осями координат графіків функцій: 1) $y=4-x$; 2) $y=6+|x|$.

6. Задано функцію $y=-\frac{12}{x}$. Не будуючи графік, знайти: 1) значення функції, якщо аргумент дорівнює -4; $1{,}5$; 2) значення аргументу, при якому функція дорівнює 6; -12; 3) вказати, через які точки проходить графік: $A(4;-3)$, $B(3;-4)$, $C(3;4)$.

7. Внесіть множник під знак кореня:

1) $(3-x)\sqrt{\frac{5}{x^2-6x+9}},x<3$; 2) $(a+1)(a+4)\sqrt{\frac{7}{a^2+8a+16}},-4<a<-1$.

8. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{0{,}36x^{14}y^{18}},x\le 0,y\ge 0$; 2) $\frac{\sqrt{m^{14}p^{16}c^{26}}}{m^3p^5c^{11}},m<0,c>0$;

3) $\frac{1{,}6a^7}{b^3}\sqrt{\frac{b^{22}}{0{,}64a^{10}}},b>0,a<0$; 4) $-0{,}3x^5\sqrt{1{,}69x^{10}y^{12}},x\le 0$; 5) $(21-y)\sqrt{\frac{529}{(y-21)^2}},y>21$;

6) $\frac{x^2-16}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{(x+4)^2}},x<-4$; 7) $3a^2\sqrt{25a^5b^7}+2a^3b\sqrt{81a^3b^5}-4a^2b^2\sqrt{169a^5b^3},a\ge 0,b\ge 0$;

8) $\left(2\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)$; 9) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)$;

10) $\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{7}\right)-\left(4\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$;

11) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{12}}+1}-\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{12}}-1}$; 12) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$;

13) $\left(\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}\right):\frac{2\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$;

14) $\sqrt{87-16\sqrt{23}}-\sqrt{39-8\sqrt{23}}$; 15) $\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$; 16) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{8-\sqrt{33+20\sqrt{2}}}}$.

9. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\left(3-\sqrt{a}\right)^2+12\sqrt{a}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{a}\right)^2-4\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt{b-2\sqrt{b+7}+8}+\sqrt{b+2\sqrt{b+7}+8}$.

10. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику:

1) $\frac{1}{\sqrt{11}-1}$; 2) $\frac{14}{\sqrt{17}+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{x^2-7x}{\sqrt{x-6}+1}$; 4) $\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 5) $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$.

11. Відомо, що $\sqrt{b-1}+\sqrt{8-b}=3$. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(b-1)(8-b)}$.

12. Спростіть вираз:

1) $0{,}28a^{-4}b^3c^{-5}\cdot 1\frac{3}{7}a^7b^{-16}c^7$; 2) $3\frac{4}{7}a^{-6}b^2\cdot\left(1\frac{3}{7}a^2b^{-3}\right)^{-2}$; 3) $\left(\frac{25a^{-3}}{4b^{-2}}\right)^{-3}\cdot\left(25a^{-8}b^5\right)^2$;

4) $\left(\frac{3a^{-4}}{a^{-8}-10a^{-4}+25}-\frac{a^{-4}}{a^{-4}-5}\right)\cdot\frac{25-a^{-8}}{8-a^{-4}}-\frac{5a^{-4}}{5-a^{-4}}$.

Відповіді та вказівки

1. 1) $D_f=R/\{-1\}$; 2) $D_f=R/\{-\frac{1}{3}\}$; 3) $D_f=R/\{0\}$.

2. Графіком є 1) координатні осі; 2) прямі $x=1, x=-1, y=-3$; 3) пряма $y=x-3$.

3. Графіком є 1) об'єднання гіперболи $y=-\frac{1}{x}$ та прямої $y=1$;

2) гіпербола $y=-\frac{1}{x}$ без точок $(-1;1),(1;-1)$;

3)точки $(0;0),(1;1)$.

4. $a=1$

5.1) З Ох $(4;0)$, з Оу $(0;4)$; 2) З Ох немає, з Оу $(0;6)$.

6. 1) $y=3$; $y=-8$; 2) $x=-2$; $x=1$; 3) графіку належать точки А та В.

7. 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{7(a+1)^2}$.

8. 1) $-0{,}6x^7y^9$; 2) $-m^4p^3c^2$; 3) $-2b^8a^2$; 4) $0{,}39x^{10}y^6$; 5) -23; 6) $\frac{x-4}{x+2}$; 7) $-19a^4b^3\sqrt{ab}$;

8) $4x-25y$; 9) $5\sqrt{15}-12$; 10) $16\sqrt{3}-47$; 11) $\sqrt{3}-2$; 12) 16; 13) $\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$;

14) $12-2\sqrt{23}$; 15) $\sqrt{3}-1$; 16) 1.

9. 1) $\begin{cases}2+2\sqrt{a}, 0<a<1,\\ 4, a\ge 1\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2, -7\le b<-6,\\ 2\sqrt{b+7}, b\ge -6\end{cases}$.

10. 1) $\frac{\sqrt{11}+1}{10}$; 2) $\sqrt{17}-\sqrt{3}$; 3) $x\left(\sqrt{x-6}-1\right)$; 4) $-(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)$;

5) $\frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{30}-2\right)}{26}$.

11. 1. *<u>Вказівка:</u>* Піднести обидві частини рівності до квадрату, враховуючи область визначення.

12. 1) $\frac{2a^3c^2}{5b^{13}}$; 2) $\frac{42b^8}{25a^{10}}$; 3) $\frac{64b^4}{25a^7}$; 4) $\frac{a^{-8}}{5-a^{-4}}$.