

Лекція № 6

Текстові задачі.

1. Діофантові рівняння

Задача 1. На площині лежать трикутники та чотирикутники, що не мають спільних точок. Разом у них 17 вершин. Скільки є трикутників і чотирикутників?

Розв'язання: Хай трикутників x , а чотирикутників y . Тоді з умови $3x + 4y = 17$ де $x, y \in \mathbb{N}$. Підбором отримуємо $x = 3, y = 2$.

Задача 2. В магазин привезли 223 л молока в бідонах по 10 л та по 17л. Скільки всього було бідонів?

Розв'язання: Хай було x бідонів по 10 л і y бідонів по 17 л. Тоді молока в бідонах всього $10x + 17y = 223$. Очевидно, що $y = 9$, бо перший доданок закінчується цифрою 0, а другий мусить закінчуватись на 3. Звідки $x = 7$.

Відповідь: Було сім 10-літрових і дев'ять 17-літрових бідонів.

2. Задачі на знаходження цілих чисел.

Задача 3. Добуток двох послідовних натуральних чисел в два рази більший меншого з них. Знайти ці числа.

Розв'язання: Хай x та $x+1$ – шукані числа. Тоді з умови $x(x+1) = 2x \Rightarrow x^2 - x = 0$. Отримуємо $x = 1, x+1 = 2$. Відповідь: 1; 2.

Задача 4. Знайти три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більший, ніж подвоєна сума другого і третього.

Розв'язання: Позначимо шукані числа як $2n+1, 2n+3, 2n+5$. З умови маємо $(2n+1)^2 - 33 = 8n+16 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0 \Rightarrow n = 4$.

Відповідь: Шукані числа 9, 11 та 13.

Задача 5. Знайти двозначне число, якщо цифра його десятків на 2 більша за цифру одиниць, а добуток цього числа і суми його цифр дорівнює 900.

Розв'язання: Хай x та $x-2$ цифри шуканого числа. Тоді з умови маємо, що наше число дорівнює $10x + x - 2 = 11x - 2$, а

$(11x - 2)(2x - 2) = 900 \Rightarrow \Rightarrow 11x^2 - 13x - 448 = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 7 \\ -5, (81) \end{bmatrix}$. Отже цифри числа 7 та 5.

Відповідь: Шукане число 75.

3. Комбінаторні задачі.

Задача 6. Учасники шахового турніру зіграли кожен з кожним 2 партії. Всього було зіграно 342 партії. Скільки було учасників турніру?

Розв'язання: Кількість зіграних партій $n(n-1) = 342 \Rightarrow n^2 - n - 342 = 0 \Rightarrow n = 19$.

Відповідь: Учасників турніру було 19.

Задача 7. В опуклому багатокутнику можна провести 65 діагоналей. Скільки він має сторін?

Розв'язання: Кількість діагоналей $\frac{n(n-3)}{2} = 65 \Rightarrow n^2 - 3n - 130 = 0 \Rightarrow n = 13$.

Відповідь: У багатокутника 13 сторін.

4. Теорема Піфагора.

Задача 8. Знайти периметр прямокутника, якщо одна його сторона на 14 см більша за другу і на 2 см менша за діагональ.

Розв'язання: Позначимо довжини сторін як x та $x+4$, тоді довжина діагоналі $x+16$. За теоремою Піфагора $(x+16)^2 = (x+4)^2 + x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0 \Rightarrow x = 10$. Порахуємо периметр $P = 2x + 2x + 28 = 68$.

Відповідь: $P = 68$.

Задача 9. Від вершини прямого кута по його сторонах одночасно починають рухатися дві матеріальні точки, швидкості яких 5 м/с і 12 м/с. Через який час відстань між ними буде 52 м?

Розв'язання: За час t точки А і В пройдуть відстані $5t$ та $12t$ відповідно. Відстань між точками – це довжина гіпотенузи АВ, отже за теоремою Піфагора $25t^2 + 144t^2 = 52^2 \Rightarrow 169t^2 = 52^2 \Rightarrow t = 4$. Шуканий час – 4 с.

Відповідь: $t = 4$ с.

5. Задачі на швидкість.

Задача 10. Катер пройшов 18 км за течією річки і потім 20 км проти течії, затративши на весь шлях 2 год. Знайти швидкість течії, якщо власна швидкість катера 20 км/год.

Розв'язання: Хай v – швидкість течії. З умови

$$\frac{18}{20+v} + \frac{20}{20-v} = 2 \Rightarrow \Rightarrow v^2 + v - 20 = 0 \Rightarrow v = 4. \quad \underline{\text{Відповідь:}} \text{ Швидкість катера } 4 \text{ км/год.}$$

Задача 11. На лузі із постійною швидкістю росте трава. 12 корів повністю випасають луг за 4 дні, а 9 корів за 6 днів. За скільки днів випасуть луг 6 корів?

Розв'язання: Позначимо за 1 весь луг. Хай v – швидкість наростання трави за

$$\text{день, а } n \text{ – шукана кількість днів. Корова з'їдає за день } \frac{1+4v}{12 \cdot 4} = \frac{1+6v}{9 \cdot 6} \Rightarrow v = \frac{1}{12}$$

$$\text{звідки } \frac{1 + \frac{1}{12}n}{6 \cdot n} = \frac{1 + \frac{1}{12} \cdot 6}{9 \cdot 6} \Rightarrow n = 12.$$

Відповідь: 6 корів випасуть траву на лузі за 12 днів.

Задача 12. Дві точки рухаються по двох колах, радіуси яких відносяться, як 1 : 6. Знайти швидкість руху кожної точки, якщо за 10 с точка, що рухається по більшому колу, пройшла на 2 м більше і зробила при цьому у 5 разів менше обертів.

Розв'язання: Хай n – кількість обертів по більшому колу, довжина якого l .

$$\text{Тоді з умови } 5nl = 6nl - 2 \Rightarrow nl = 2 \Rightarrow 5nl = 10 \text{ м за 10 сек.}$$

$$\Rightarrow V_1 = 1 \text{ м/сек}; V_2 = 1,2 \text{ м/сек}.$$

Відповідь: $V_1 = 1 \text{ м/сек}; V_2 = 1,2 \text{ м/сек}$

Задача 13. До задуманого додатного цілого числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75% цієї різниці і ще відняли задумане число. Отримали 0. Знайти задумане число.

Розв'язання: Хай x – задумане число. Тоді з умови задачі маємо рівнян-

$$\text{ня } \left((10x + 7) - x^2 \right) - \frac{3}{4} \left((10x + 7) - x^2 \right) - x = 0 \Rightarrow x = 7. \quad \underline{\text{Відповідь:}} \text{ Задумано число } 7.$$

6. Задачі на найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне.

Задача 14. На станції стоять три товарні потяги вантажністю 2400 т, 1600 т і 680 т. Яка найменша кількість вагонів може бути в цих трьох потягах, якщо всі вагони мають однакову вантажність, яка є цілим числом?

Розв'язання: Хай було x вагонів вантажністю k тон у першому потязі, y вагонів у другому і z у третьому. Тоді вантажність в першому потязі була $x \cdot k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2400$ тон, в другому $y \cdot k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 1600$ тон, а в третьому $z \cdot k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17 = 680$ тон. Найбільшим спільним дільником цих чисел є число $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$, що і є місткістю одного вагона. Отже $k = 40$, звідки $x = 60$, $y = 40$, $z = 17$. Відповідь: Кількість 60, 40 і 17.

Задача 15. Три пароплави заходять в порт після кожного рейсу і зразу ж виходять у наступний рейс. Перший пароплав здійснює рейс за 120 год, другий за 150 год, а третій – за 90 год. Пароплави вийшли в море одночасно. Через скільки діб найближчим часом вони зустрінуться в порту?

Розв'язання: Хай перший пароплав зробив x рейсів до зустрічі, другий y рейсів, а третій z рейсів. Тоді до зустрічі кожен з них затратив однакову кількість часу $120x = 150y = 90z = t$. Цей час має бути найменшим спільним кратним тривалостей всіх трьох рейсів. $\text{НСК}(120; 150; 90) = 1800 = t$. Звідки $x = 15$; $y = 12$; $z = 20$.

Відповідь: Перший пароплав зробив до зустрічі 15 рейсів, другий 12, а третій 20 рейсів.