Лекція 8

Системи лінійних рівнянь.

Контрольні запитання:

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянння з однією змінною? Що таке коефіцієнти рівняння?
2. Що таке розв’язок рівняння? Які рівняння називають еквівалентними?
3. Скільки розв’язків може мати лінійне рівняння з однією змінною? Як кількість розв’язків рівняння залежить від його коефіцієнтів?

Пригадаємо також, що у задачах часто виникає потреба розв’язувати системи та сукупності двох (або декількох) лінійних рівнянь з однією змінною, а також різноманітні їх комбінації.

Позначення. Система двох лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1 = 0, \\ a_2x + b_2 = 0, \end{cases}$

сукупність двох лінійних рівнянь $\left[\begin{array}{l} a_1x + b_1 = 0, \\ a_2x + b_2 = 0, \end{array}\right.$

Означення. Розв’язком (коренем) *системи* двох (декількох) лінійних рівнянь з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює ***кожне*** рівняння системи на правильну рівність.

Так x_0 буде розв’язком системи $\begin{cases} a_1x + b_1 = 0, \\ a_2x + b_2 = 0, \end{cases}$ якщо $a_1x_0 + b_1 = 0$ **і** $a_2x_0 + b_2 = 0$.

Означення. Розв’язком (коренем) *сукупності* двох (декількох) лінійних рівнянь з однією змінною називається таке дійсне число x_0, яке перетворює ***хоч одне з*** рівнянь сукупності на правильну рівність.

Так x_0 буде розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{array}\right.$ якщо $a_1x_0+b_1=0$ **<u>або</u>** $a_2x_0+b_2=0$

Наприклад, система $\begin{cases} x=2, \\ x=3 \end{cases}$ не має розв'язку, розв'язками сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3 \end{array}\right.$ є $x=2,$ або $x=3$; система $\begin{cases} x=2, \\ x=3, \\ x-3=0 \end{cases}$ не має розв'язку, розв'язками сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3, \\ x-3=0 \end{array}\right.$ є $x=2,$ або $x=3$; розв'язком системи $\begin{cases} x=2, \\ x-2=0 \end{cases}$ є $x=2,$ розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x-2=0 \end{array}\right.$ є теж $x=2$.

Означення. <u>Системи (сукупності) рівнянь </u>називаються <u>еквівалентними</u>, якщо їх розв'язки співпадають.

Зауваження. Відзначимо, що система рівняння і сукупності двох рівнянь $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{array}\right. \\ a_3x+b_3=0, \end{cases}$ еквівалентна сукупності двох систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_3x+b_3=0, \end{cases} \\ \begin{cases} a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0. \end{cases} \end{array}\right.$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(2x+1)(x-3)=0$.

Добуток двох чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоч один з множників дорівнює нулю, тому дане рівняння еквівалентне сукупності $\left[\begin{array}{l} 2x+1=0, \\ x-3=0, \end{array}\right.$ розв'язки якої $x=-\frac{1}{2}$, або $x=3$.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Чи має розв`язки система $\begin{cases} 2x-1=0, \\ x+3=0? \end{cases}$ сукупність $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ 3x+2=7? \end{array}\right.$

2. Скільки розв'язків має система $\begin{cases} x+2=0, \\ x=5, \\ 4x+8=0, \\ x-3=0? \end{cases}$ сукупність $\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x=5, \\ 4x+8=0, \\ x-3=0? \end{array}\right.$

Означення. Системою двох лінійних рівнянь з двома змінними називається система вигляду

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ – фіксовані дійсні числа, які називають коефіцієнтами системи.

Означення. Розв'язком (коренем) системи лінійних рівнянь з двома змінними називається така пара дійсних число $(x_0; y_0)$, яка перетворює кожне рівняння системи на правильну рівність.

Означення. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Означення. Системи (сукупності) рівнянь називаються еквівалентними, якщо їх розв'язки співпадають.

Зауваження. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними (1) може мати один розв'язок, нескінченно багато розв'язків або не мати розв'язків взагалі.

Зауваження. Системи, які не мають розв'язків, теж є еквівалентними.

Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними розв'язуються одним з трьох методів:

1) методом підстановки;
2) методом перетворень;
3) графічно.

Метод підстановки полягає в тому, що ми виражаємо з одного із рівнянь (з якого простіше) деяку змінну (яку простіше) та підставляємо отриманий вираз в друге рівняння. Таким чином, друге рівняняння стає лінійним рівнянням однієї змінної, яке ми можемо розв'язати. Якщо це лінійне рівняння не має розв'язку, то і вся система немає розв'язку. Якщо лінійне рівняння має безліч розв'язків, то розв'язками системи будуть всі точки, що задовольняють перше рівняння. Якщо ж лінійне рівняння має єдиний розв'язок, то знаходимо його і, підставивши у перше рівняння системи, одержуємо єдиний розв'язок системи.

Цей метод базується на тому, що система $\begin{cases} x = ky + d, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$ де a, b, c, k, d – фіксовані дійсні числа, еквівалентна (тобто має такі ж розв'язки) системі $\begin{cases} x = ky + d, \\ a(ky + d) + by + c = 0. \end{cases}$

Приклад 2. Розв'язати системи:

1) $\begin{cases} x + 7y = 3, \\ 2x + 14y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 7y, \\ 2(3 - 7y) + 14y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 7y, \\ 6 - 14y + 14y = 0, \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 7y, \\ 6 = 0. \end{cases}$ Система не має розв'язку.

2) $\begin{cases} x + 5y = 3, \\ 2x + 10y = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 5y, \\ 2(3 - 5y) + 10y = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 5y, \\ 6 - 10y + 10y = 6, \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 5y, \\ 6 = 6. \end{cases}$ Система має нескінченно багато розв'язків $(3 - 5y, y)$.

3) $\begin{cases} 5x + 7y = -13, \\ x + 9y = 7; \end{cases} <=> \begin{cases} 5(7 - 9y) + 7y = -13, \\ x = 7 - 9y; \end{cases} <=> \begin{cases} -38y = -48, \\ x = 7 - 9y; \end{cases}$ $<=> \begin{cases} y = \frac{24}{19}, \\ x = -\frac{83}{19}. \end{cases}$ Розв'язок системи $\left(-\frac{83}{19}, \frac{24}{19}\right)$.

Метод перетворень (інколи його називають **методом додавання**) полягає в тому, що будь-яке із рівнянь системи (або і обидва) можна замінити на суму чи різницю заданих рівнянь, на будь-яке рівняння системи, домножене на деяку відмінну від нуля сталу, на суму чи різницю рівнянь, домноженних на ненульові константи. Такі перетворення системи будть еквівалентними. Мета таких еквівалентних перетворень: отримати систему, в якій одне або і обидва рівняння є лінійними рівняннями однієї змінної.

Приклад 3. Розв'язати системи:

1) $\begin{cases} y+3x=2, \\ 3x-y=3; \end{cases} <=> \begin{cases} 6x=5, \\ 2y=-1; \end{cases} <=> \begin{cases} x=\frac{5}{6}, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$ Розв'язок системи $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}\right)$. Тут перше рівняння системи ми замінили на суму першого і другого, а друге – на різницю. При цьому перше рівняння стало лінійним відносно змінної x, а друге – відносно y.

2) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$ Домножимо перше рівняння на 3, а друге на 2: $\begin{cases} 6x+9y=12, \\ 6x-4y=10, \end{cases}$ та віднімемо від першого рівняння друге. Одержимо, що $13y=2$. Тепер домножимо перше рівняння на 2, а другк на 3: $\begin{cases} 4x+6y=8, \\ 9x-6y=15, \end{cases}$ та додамо. Одержимо: $13x=23$. Отже, початкова система еквівалентна системі $\begin{cases} 13y=2 \\ 13x=23. \end{cases}$ Розв'язок системи $\left(\frac{23}{13}; \frac{2}{13}\right)$.

Графічний метод полягає у побудові графіків обох рівнянь та пошуку спільних точок цих графіків. Графіком лінійного рівняння є пряма, тобто такий графік може бути побудований по двом точкам. Недоліком цього методу є неточність побудов, тому краще застосовувати його не у випадках, коли треба розв'язати систему, а тоді, коли треба вказати лише кількість розв'язків системи. Якщо все ж розв'язувати систему графічно, неодмінно треба для знайдених коренів робити перевірку.

Приклад 4. Скільки розв'язків має система $\begin{cases} y=x+3, \\ y=x+2+a, \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

Побудувавши графіки обох рівнянь (перше рівняння задає фіксовану пряму, друге – множину прямих, паралельних до першої), одержимо: при $a=1$ система має безліч розв'язків, при $a \neq 1$ система не має розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x-3y=1, \\ |2x-y|=2. \end{cases}$

Оскільки рівняння $|2x-y|=2$ виконується, коли $2x-y=2$ або $2x-y=-2$, то дана система «розпадається» на дві системи:

$\begin{cases} x-3y=1, \\ 2x-y=2; \end{cases}$ або $\begin{cases} x-3y=1, \\ 2x-y=-2; \end{cases}$

$x=3y+1;$ $\qquad$ $x=3y+1;$

$$2(3y+1)-y=2;$$
$$6y+2-y=2;$$
$$5y=0;$$
$$y=0;$$
$$x=3y+1=0+1=1.$$
$(1;0)$ – розв’язок.

$$2(3y+1)-y=-2;$$
$$6y+2-y=-2;$$
$$5y=-4;$$
$$y=-\frac{4}{5};$$
$$x=3y+1=-\frac{12}{5}+1=-\frac{7}{5}.$$
$\left(-\frac{7}{5};-\frac{12}{5}\right)$ – розв’язок.

Відповідь. $(1;0)$ або $\left(-\frac{7}{5};-\frac{12}{5}\right)$

Зауваження. Як вже зазначалося вище, питання кількості розв’язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими (1) тісно пов’язане з питанням взаємного розташування двох прямих на площині. Дійсно, можливі ситуації (рис. 1-3):

1) система має єдиний розв’язок, при $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ (цим розв’язком є точка перетину прямих, заданих відповідними рівняннями);

2) система не має розв’язків, при $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (оскільки прямі, задані відповідними рівняннями, паралельні, тобто не мають спільних точок);

3) система має нескінченно багато розв’язків, при $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (будь-яка точка прямих, що збігаються, є розв’язком системи).

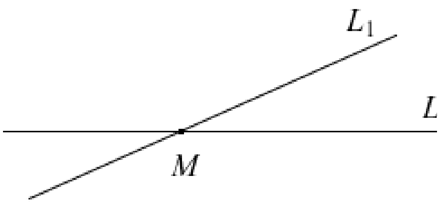

Рис. 1

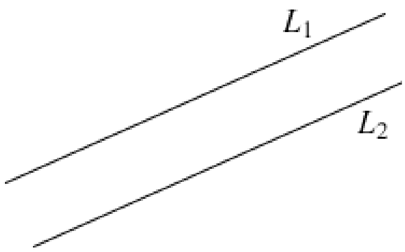

Рис. 2

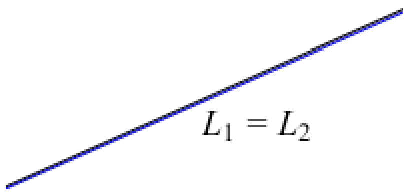

Рис. 3

Приклад 6. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} ax+y=2, \\ 9x+ay=6 \end{cases}$ має безліч розв’язків?

За умовою 3) необхідно, щоб всі коефіцієнти системи $\begin{cases} ax + y - 2 = 0, \\ 9x + ay - 6 = 0 \end{cases}$ були пропорційними, тобто $\frac{a}{9} = \frac{1}{a} = \frac{-2}{-6}$. З першої рівності одержимо, що $a^2 = 9$, тобто $a = \pm 3$. Залишається перевірити другу рівність для знайдених a: бачимо, що $a = -3$ – сторонній розв'язок.

Відповідь. $a = 3$.

Приклад 7. Визначити, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3 \end{cases}$ не має розв'язків.

Дана система рівнянь не матиме розв'язків тоді, коли її коефіцієнти будуть задовольняти наступні умови: $\frac{3}{a} = \frac{a}{3} \neq \frac{3}{3}$. Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} = \frac{a}{3}, \\ \frac{a}{3} \neq \frac{3}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9, \\ \frac{a}{3} \neq 1; \end{cases}$$

$\begin{cases} a = 3, \\ a \neq 3. \end{cases}$ або $\begin{cases} a = -3, \\ a \neq 3; \end{cases}$

Дана система не має коренів.

$a = -3$.

Відповідь: $a = -3$.

Системи лінійних рівнянь моделюють багато ситуацій з реального життя. Для розв'язку різноманітних текстових задач (зокрема, задач на рух та на відсоткові розрахунки) необхідно скласти систему лінійних рівнянь та розв'язати її.

Приклад 8. Знайти двозначне число, якщо цифра його десятків на 2 більша за цифру одиниць, а сума його цифр втричі більша за цифру одиниць.

Нехай шукане число $\overline{ab}$, тобто a – цифра десятків числа, b – цифра його одиниць. Тоді умову задачі можна переписати за допомогою такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} a = b + 2, \\ a + b = 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2, \\ a = 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = b + 2, \\ a = 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2, \\ a = 4. \end{cases}$$

Відповідь. 42.

Приклад 9. Вкладник поклав до банку 2000 грн на різні рахунки. По першому з них банк виплачує 8% річних, а по другому – 10%. Через рік вкладник отримав 176 грн. Скільки було покладено грн. на кожен рахунок.

Нехай на один рахунок вкладник поклав x, а на другий – y грн. Всього вкладник поклав до банку $x + y = 2000$ грн. Через рік прибуток по першому рахунку склав $0{,}08x$ грн, а по другому – $0{,}1y$ грн, тобто, загальний прибуток – $0{,}08x + 0{,}1y = 176$ грн. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0{,}08x + 0{,}1y = 176; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2000 - x, \\ 0{,}08x + 0{,}1(2000 - x) = 176; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2000 - x, \\ 0{,}08x + 200 - 0{,}1x = 176; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2000 - x, \\ 0{,}02x = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 800, \\ x = 1200. \end{cases}$$

Відповідь. На перший рахунок вкладник поклав 1200 грн, а на другий – 800 грн.

Домашнє завдання.

1. Розв'язати системи: 1) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 6y = 10, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 9y - 2 = 0 \\ 8x - 15y - 25 = 0 \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 10(a + 3) = -1 - 6b \\ 6(b + 3) = 8 - 3a \end{cases}$

4. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ |x - 2y| = 2. \end{cases}$

5. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} (a + 1)x + y = 3, \\ 2x - (a - 2)y = 6 \end{cases}$ не має розв'язків?

6. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x - 5y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

7. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 3x + ay = 15 \\ 6x - 8y = 30 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

8. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ ax - 18y = 24 \end{cases}$ має єдиний розв’язок?

9. Дві майстерні мали пошити 75 костюмів. Коли перша майстерня виконала 60% замовлення, а друга 50%, то виявилося, що перша пошила на 12 костюмів більше ніж друга. Скільки костюмів мала пошити кожна майстерня?

10**.** Відомо, що 4 кг огірків і 3 кг помідорів коштували 24 грн. Після того, як огірки подорожчали на 50%, а помідори подешевшали на 20%, за 2 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 25 грн. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.