Лекція №8
Квадратні рівняння.

1.Розв'язування квадратних рівнянь з однією змінною

Означення: Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, у якому a, b і c – дійсні числа, причому $a \neq 0$, а x – змінна, називають **квадратним рівнянням з однією змінною.**

Розв'язати квадратне рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Приклади квадратних рівнянь від різних змінних:
$2x^2-3x+1=0,\ 5t^2+9t-7=0,\ \sqrt{3}m^2+2=0,\ 2x^2-1=0,\ y^2-2y=0$.

Серед квадратних рівнянь зустрічаються **неповні** квадратні рівняння – рівняння, у яких коефіцієнт $b=0$ або $c=0$ або обидва. Згадаємо, як розв'язуються ці рівняння:

- Рівняння виду $ax^2+c=0$ зведемо до $ax^2=-c$. Оскільки $a \neq 0$, маємо $x^2=-\frac{b}{a}$. Якщо вираз $-\frac{b}{a}>0$ то рівняння має два корені: $x_1=\sqrt{-\frac{b}{a}}$ та $x_2=-\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Якщо $\frac{b}{a}=0$, то корінь один – $x=0$, якщо ж $-\frac{b}{a}<0$, то оскільки невід'ємний вираз в лівій частині рівняння не може дорівнювати від'ємному числу, рівняння коренів не матиме.

Приклади: Розв'яжемо рівняння:1) $2x^2-4=0$; 2) $x^2+3=0$; 3) $7x^2=0$.

1) Розв'язуючи рівняння отримаємо два розв'язки рівняння:
   $2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2}$;
2) $x^2=-3$, рівняння розв'язків не має;
3) $7x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ – розв'язок.

- Рівняння виду $ax^2+bx=0$ перетворимо так $x(ax+b)=0$, звідки отримаємо розв'язки $x_1=0$ та $x_2=-\frac{b}{a}$.

Приклад: Розв'яжемо рівняння: $3x^2-27x=0$. Розкладаємо на множники, і знаходимо корені рівняння $3x(x-9)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=9$,

- Щоб розв'язати **повне** квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, перетворимо рівняння , виділивши повний квадрат: $ax^2+bx+c=$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$\Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

отже, якщо вираз $D=b^2-4ac>0$ (який, як відомо, називається дискримінантом), то коренів рівняння два : $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ та $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (*), якщо дискримінант $D=0$ – корінь один $x=-\frac{b}{2a}$, а якщо $D<0$, то рівняння розв'язків не має. Розв'язуючи квадратне рівняння, як правило, спочатку обчислюють дискримінант і вже, в залежності від його значення, визначають розв'язки рівняння за готовими формулами коренів (*).

<u>Приклади:</u> 1) $x^2+x-2=0$; 2) $2x^2-5x+7=0$; 3) $4x^2-12x+9=0$.

Розв'язання: 1) $x^2+x-2=0\Rightarrow D=1+4\cdot 2=9, \sqrt{D}=3,\ x_1=\frac{-1+3}{2}=1,\ x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$;

2) $2x^2-5x+7=0\Rightarrow D=5^2-4\cdot 2\cdot 7=-47<0$, рівняння коренів не має;

3) $4x^2-12x+9=0\Rightarrow D=12^2-4\cdot 4\cdot 9=0\Rightarrow x=\frac{12}{8}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$; 4) $x^2-(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}=0$

$\Rightarrow D=(\sqrt{5}-1)^2+4\cdot\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2\Rightarrow x=-1,\quad x=\sqrt{5}$.

<u>Задачі:</u>

1. До задуманого цілого додатного числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75% цієї різниці і ще відняли задумане число. Отримали 0. Знайти задумане число.

<u>Розв'язання:</u> Позначимо шукане число за x. Якщо дописати справа цифру 7, то у всіх цифр числа x збільшиться розрядність (число одиниць стане числом десятків, число десятків стане числом сотень тощо) , тобто матимемо число $10x+7$. Від отриманого числа віднімемо квадрат задуманого числа і отримаємо $10x+7-x^2$. 75% від цього виразу є $\frac{3}{4}(10x+7-x^2)$, тоді умова задачі виглядатиме так $10x+7-x^2-\frac{3}{4}(10x+7-x^2)-x=0$. Спростивши вираз отримаємо квадратне рівняння: $x^2-6x-7=0$, розв'язавши яке отримаємо корені $x=-1$ та $x=7$. Оскільки за умовою число x додатне, то маємо у відповідь $x=7$.

Іноді коефіцієнти рівняння невідомі і є виразами від параметра. Параметр – деяке число, значення якого буде введено пізніше.

2. Для кожного значення параметра a знайти розв'язки рівняння $x^2-(3a-2)x+2a^2-a-3=0$.

<u>Розв'язання:</u> Оскільки це рівняння завжди квадратне (бо коефіцієнт при x^2 дорівнює 1), розв'язуватимемо його за загальною схемою для квадратного рівняння. Знайдемо дискримінант :

$D=(3a-2)^2-8a^2+4a+12=9a^2-12a+4-8a^2+4a+12=a^2-8a+16=(a-4)^2$.

Оскільки дискримінант є невід'ємний вираз, то рівняння завжди має корені. $\sqrt{D}=|a-4|,\ x_1=\dfrac{3a-2+(a-4)}{2}=2a-3,\ x_2=\dfrac{3a-2-(a-4)}{2}=a+1$. При $D=(a-4)^2=0 \Rightarrow a=4$ рівняння має один корінь, бо корені співпадають.

Відповідь: При $a=4$ маємо один корінь $x=5$, при $a\neq 4$ коренів два: $x=2a-3$ та $x=a+1$.

3. При якому значенні параметра a рівняння $ax^2-(a+1)x+2a-1=0$ має один корінь? Для кожного знайденого a вказати корінь.

<u>Розв'язання:</u> Оскільки значення параметра може бути довільним дійсним числом, виникає питання, чи завжди дане рівняння буде квадратним? Очевидно, що при $a=0$ рівняння перетворюється на лінійне $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Розглянемо ті $a\neq 0$, для яких рівняння буде квадратним. Квадратне рівняння має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює 0.Обчислимо дискримінант:

$D=(a+1)^2-4a(2a-1)=-7a^2+6a+1=0 \Rightarrow 7a^2-6a-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{D_1}=\sqrt{36+28}=8 \Rightarrow a_1=1,\ a_2=-\dfrac{1}{7}$. Корінь при нульовому дискримінанті обчислюється за формулою $x=\dfrac{a+1}{2a}$. Тому при $a=1,\ x=1$, при $a=-\dfrac{1}{7},\ x=-3$.

Відповідь: При $a=0,\ x=1$; при $a=1, x=1$, при $a=-\dfrac{1}{7}, x=-3$.

2. Властивості коренів квадратного рівняння.

<u>**Теорема Вієта (пряма)**</u>: Якщо квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ має корені $x_1,\ x_2$ то для них виконується система: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

<u>Приклад:</u> Впевнимося у справедливості теореми на прикладі $2x^2-3x+1=0$. За формулами обчислення коренів маємо: $x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_1+x_2=\dfrac{3}{2},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}$.

За теоремою Вієта $-\dfrac{b}{a}=-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$, що співпадає з нашими обчисленнями.

<u>Приклад:</u> Для рівняння $x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-2 \Rightarrow x_1+x_2=3,\ x_1x_2=-10$.

<u>**Наслідок:**</u> Для коренів $x_1,\ x_2$ **зведеного** квадратного рівняння $x^2+bx+c=0$ теорема Вієта має простіший вигляд: $\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=c \end{cases}$.

<u>Зауваження</u>: Якщо D=0 то корені співпадають, тобто $x_1 = x_2$ і вважається , що корінь один.

<u>Теорема Вієта (обернена)</u> Якщо числа x_1, x_2 задовольняють системі $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

<u>Приклад.</u> Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа 2 і -5.
<u>Розв'язання:</u> За оберненою теоремою Вієта $2 + (-5) = -b,\ 2 \cdot (-5) = c \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 3, c = -10 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$.

Задачі:

1. Не обчислюючи коренів рівняння $5x^2 - 10x + 3 = 0$ обчислити значення виразів а) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$.

<u>Розв'язання:</u> За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 2;\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{5}$ звідки маємо

а) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \dfrac{2 \cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}$; б) $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$
$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{14}{5}$.

2. При якому значенні параметра p сума дійсних коренів рівняння $x^2 - (2 - p)x + p - 3 = 0$ дорівнює 8.
<u>Розв'язання:</u> За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 2 - p = 8$ звідки маємо $p = -6$. Перевіримо існування коренів при знайденому значенні параметра. При $p = -6$ маємо $x^2 - 8x - 9 = 0,\ x_1 = 9,\ x_2 = -1$.

3. Відомо, що числа x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 - (2a - 3)x + a^2 - 4 = 0$. Знайдіть значення параметра a, при яких виконується рівність $3x_1 + 3x_2 = x_1x_2$.
<u>Розв'язання:</u> За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 2a - 3,\ x_1x_2 = a^2 - 4$ звідки з умови $3(x_1 + x_2) = x_1x_2 \Rightarrow 3(2a - 3) = a^2 - 4 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a_1 = 5,\ a_2 = 1$. Перевіримо дискримінант $D = (2a - 3)^2 - 4a^2 + 16 = -12a + 25$ і для знайдених a. При $a = 5,\ D = -60 + 25 < 0$ – дійсних коренів рівняння не має, а отже знайдене a не підходить. При $a = 1,\ D = -12 + 25 > 0$. <u>Відповідь</u>: $a = 1$.

4. Знайти таке значення параметра a, що один із коренів рівняння $(a^2 - 5a + 3)x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0$ в два рази більший другого.
<u>Розв'язання:</u> Оскільки йдеться про два корені рівняння, то рівняння має бути квадратним, а отже $a^2 - 5a + 3 \neq 0$. За теоремою Вієта

$x_1+x_2=\dfrac{3a-1}{a^2-5a+3},\ x_1x_2=\dfrac{2}{a^2-5a+3}$. Враховуючи умову $x_1=2x_2$, маємо

$x_1+x_2=2x_2+x_2=3x_2=\dfrac{3a-1}{a^2-5a+3},\ x_1x_2=2x_2^2=\dfrac{2}{a^2-5a+3}\Rightarrow$

$x_2=\dfrac{3a-1}{3(a^2-5a+3)},\ x_2^2=\dfrac{1}{a^2-5a+3}\Rightarrow\left(\dfrac{3a-1}{3(a^2-5a+3)}\right)^2=\dfrac{1}{a^2-5a+3}\Rightarrow$

$\dfrac{(3a-1)^2}{9(a^2-5a+3)^2}=\dfrac{1}{a^2-5a+3}\Rightarrow(3a-1)^2=9(a^2-5a+3)\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$. Перевірка показує, що при знайденому a коефіцієнт при x^2 не дорівнює 0, а отже рівняння є квадратним. Перевіримо дискримінант.

$D=(3a-1)^2-4\cdot2\cdot(a^2-5a+3)=a^2+34a-23$. При $a=\dfrac{2}{3}$ маємо

$D=\dfrac{4}{9}+\dfrac{34\cdot2}{3}-23==\dfrac{1}{9}>0$. Знайдене значення параметра підходить за всіма умовами. <u>Відповідь.</u> $a=\dfrac{2}{3}$.

5. При яких значеннях a і b корені рівняння $x^2+ax+b=0$ дорівнюють $2a$ і $2b$.

<u>Розв'язання:</u> Оскільки за умовою $x_1=2a,\ x_2=2b$, то за теоремою Вієта

$$\begin{cases}x_1+x_2=2a+2b=-a\\x_1x_2=4ab=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=-2b\\b(4a-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=-2b\\\left[\begin{array}{l}b=0\\a=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a=-2b\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}3a=-2b\\a=\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}b=-\dfrac{3}{8}\\a=\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

Дискримінант рівняння $D=a^2-4b$. При $a=0,b=0$ $D=0$. При $a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{3}{8}$, $D=\dfrac{25}{16}>0$. При обох знайдених a і b умови виконуються.

<u>Відповідь:</u> $a=0,b=0$ або $a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{3}{8}$.

6. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа, на 1 більші за корені рівняння $2x^2+mx+5m=0$. При яких значеннях параметра m такі корені існують?

<u>Розв'язання:</u> Якщо $x_1,\ x_2$ – корені рівняння $2x^2+mx+5m=0$, то за теоремою Вієта $x_1+x_2=-\dfrac{m}{2},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{5m}{2}$. Нехай наше нове рівняння залежить від змінної y, тоді $y_1=x_1+1,\ y_2=x_2+1$. Шукатимемо рівняння у вигляді $y^2+by+c=0$. Тоді за оберненою теоремою Вієта для нового рівняння маємо

$y_1+y_2=-b,$

$y_1y_2=c\Rightarrow x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=-b,\ (x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=c$. Підста-

вимо у ці рівності значення сум і добутків: $y_1 + y_2 = -\frac{m}{2} + 2 = -b,$
$y_1 \cdot y_2 = \frac{5m}{2} - \frac{m}{2} + 1 = c$. Після спрощення $b = \frac{m-4}{2}$, $c = 2m+1$. Нове квадратне рівняння матиме вигляд: $y^2 + \frac{m-4}{2}y + 2m + 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + (m-4)y + 4m + 2 = 0$. Для відповіді на друге питання знайдемо дискримінант одного з квадратних рівнянь . Якщо існують корені x_1, x_2 першого рівняння то існують і корені $y_1 = x_1 + 1, \; y_2 = x_2 + 1$ другого. Для першого рівняння $D = m^2 - 40m = m(m-40) \ge 0$.
Ця нерівність еквівалентна об'єднанню двох систем, або $\begin{cases} m \ge 0 \\ m - 40 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow m \ge 40$,
або $\begin{cases} m \le 0 \\ m - 40 \le 0 \end{cases} \Rightarrow m \le 0$. Об'єднавши відповіді, отримаємо : $m \in (-\infty, 0] \cup [40, +\infty)$.

Розклад квадратного тричлена на множники.

Розглянемо вираз $ax^2 + bx + c$, що називається **квадратним тричленом**. Виділяючи повний квадрат, маємо

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

. Якщо вираз $b^2 - 4ac \ge 0$, то вираз в дужках можна розкласти, як різницю квадратів $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right) =$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена**. Отже, якщо дискримінант квадратного тричлена невід'ємний (і відповідне квадратне рівняння має корені), то його можна розкласти на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені відповідного квадратного рівняння. Якщо $D = b^2 - 4ac = 0$, то $x_1 = x_2$ і $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. При $D < 0$ квадратний тричлен на простіші множники не розкладається.

<u>Приклад:</u> Розкласти на множники: а) $x^2 + x - 2$; б) $4x^2 - 4x + 1$.
Розв'язання: а) Рівняння $x^2 + x - 2 = 0$ має корені $x_1 = -2, \; x_2 = 1$, а отже квадратний вираз розкладається на $x^2 + x - 2 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 2)(x - 1)$;

б) Рівняння $4x^2-4x+1=0$ має один корінь $x_1=\frac{1}{2}$, а отже квадратний вираз розкладається так $4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=(2x-1)^2$.

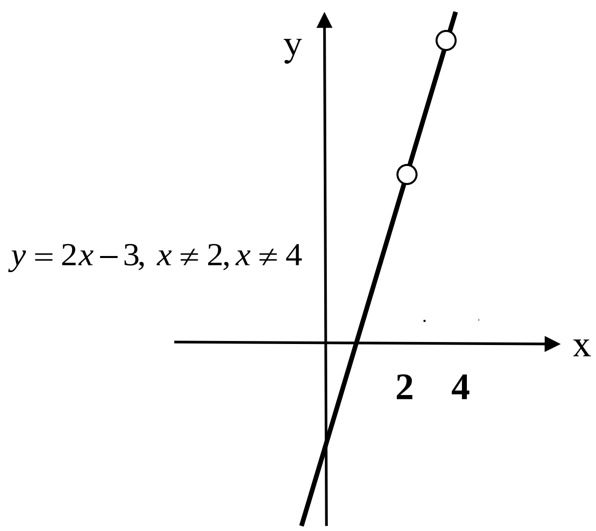
Задачі:

1. Скоротити дріб: $\frac{3a^2+5a-2}{5a^2+14a+8}$.

<u>Розв'язання</u>: Розкладемо квадратні тричлени в чисельнику і знаменнику дробу на множники . Корені відповідного рівняння $3a^2+5a-2=0$ $a_1=\frac{1}{3}, a_2=-2$, тобто тричлен чисельника можна розкласти так $3a^2+5a-2=3\left(a-\frac{1}{3}\right)(a+2)$, а для рівняння $5a^2+14a+8=0$ корені $a_3=-2, a_4=-\frac{4}{5}$, тобто тричлен знаменника розкладається так $5a^2+14a+8=5(a+2)\left(a+\frac{4}{5}\right)$. Підставляємо

$$\frac{3a^2+5a-2}{5a^2+14a+8}=\frac{3(a+2)\left(a-\frac{1}{3}\right)}{5(a+2)\left(a+\frac{4}{5}\right)}=\frac{3\left(a-\frac{1}{3}\right)}{5\left(a+\frac{4}{5}\right)}=\frac{3a-1}{5a+4},\ a\neq-2,\ a\neq-\frac{4}{5}.$$

2. Побудувати графік функції: $y=\frac{x^2-x-2}{x-2}-\frac{x^2-8x+16}{4-x}$. Перш за все запишемо область визначення функції: $x\neq 2,\ x\neq 4$. Знайдемо корені рівняння $x^2-x-2=0$: $x_1=2,\ x_2=-1$ та рівняння $x^2-8x+16=0$: $x_3=4$ і розкладемо квадратні вирази на множники: $y=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}-\frac{(x-4)^2}{4-x}=x+1+x-4=2x-3$. Необхідно побудувати графік функції $y=2x-3$ при умові $x\neq 2, x\neq 4$.



Домашнє завдання:

1. Скоротити дріб: а) $\dfrac{2x^2-x-1}{2x-2x^2}$; б) $\dfrac{9x^3+3x^2+3x+1}{3x^2-2x-1}$.

2. При яких значеннях a рівняння $(2a-3)x^2+(6-4a)x+a-1=0$ має єдиний розв'язок? Вказати ці розв'язки для знайдених a.

3. Розв'язати рівняння для кожного значення параметра:

1) $x^2-(3a-1)x+2a^2-2a=0$; 2) $x^2-2(a+2)x+12+a^2=0$; 3) $(a+4)x^2+6x-1=0$.

4. Один з коренів рівняння $2x^2-7x-m=0$ в шість разів більший за інший. Знайти значення m та корені рівняння.

5. Відомо, що числа x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $x^2-(2a-3)x+a^2-3=0$. Знайдіть значення параметра a, при яких виконується рівність $2x_1+2x_2=x_1x_2$.

6. Скласти квадратне рівняння з коренями: а) 8 і -3; б) $3-\sqrt{5}$ і $3+\sqrt{5}$.

7. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є $\dfrac{1}{x_1}$ та $\dfrac{1}{x_2}$, де x_1 та x_2 корені рівняння $2x^2+ax+a-1=0$. При яких значеннях параметра a такі корені існують?

8. Не обчислюючи коренів рівняння $2x^2-5x-4=0$ знайти :

а) $x_1x_2^2+x_2x_1^2$; б) $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

9. Відомо, що корені рівняння $x^2-5x+a=0$ на 1 менші коренів рівняння $x^2-7x+3a-6=0$. Знайти a і корені кожного з рівнянь.

10. Спростити вираз: $\left(\dfrac{1}{t^2+5t+6}+\dfrac{2t+2}{t^2+6t+8}+\dfrac{1}{t^2+7t+12}\right)^2:\dfrac{2}{(t-4)^2+16t}$.

11. Побудувати графік: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}-\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$.

Відповіді та вказівки:

1. Розклавши квадратні тричлени отримаємо: а) $-\frac{2x+1}{2x}$; б) $\frac{3x^2+1}{x-1}$.

2. При $a=\frac{3}{2}$ рівняння не є квадратним і не має розв'язку. При $D=0,\ a=\frac{3}{2},\ a=2 \Rightarrow$ Рівняння має 1 розв'язок лише при $a=2\ (x=1)$.

3. 1) $x^2-(3a-1)x+2a^2-2a=0 \Rightarrow$ при $a=-1,\ x_1=-2$, при $a\neq -1,\ x_1=2a;\ x_2=a-1$.
2) $x^2-2(a+2)x+12+a^2=0 \Rightarrow$ при $a>2,\ x_1=a+2+\sqrt{4a-8},\ x_2=a+2-\sqrt{4a-8}$; при $a=2,\ x_1=4$; при $a<2,\ x\in\varnothing$.
3) $(a+4)x^2+6x-1=0 \Rightarrow$ при $a=-4,\ x=\frac{1}{6}$; при $a<-13,\ x\in\varnothing$; при $a=-13,\ x_1=-1/3$; при $a\in(-13;-4)\cup(-4;\infty),\ x_1=\frac{3+\sqrt{a+13}}{a+4},\ x_2=\frac{3-\sqrt{a+13}}{a+4}$

4. Запишіть умову $x_1=6x_2$ і теорему Вієта для рівняння $2x^2-7x-m=0$ звідки $x_2=-\frac{1}{2};\ x_1=-3, m=-\frac{3}{2}$.

5. Записуємо теорему Вієта для рівняння $x^2-(2a-3)x+a^2-3=0$ і підставляємо відповідні вирази в умову $2x_1+2x_2=x_1x_2$. Отримаємо рівняння $a^2-4a+3=0$, звідки $a_1=3,\ a_2=1$. При $a=3$ рівняння коренів не має, отже $a=1$.

6. Шукані квадратні рівняння: а) $x^2-5x-24=0$; б) $x^2-6x+4=0$.

7. Застосувавши обернену теорему Вієта отримаємо шукане рівняння $(a-1)x^2+ax+2=0$. Корені обох рівнянь існують при невід'ємному дискримінанті $a^2-8x+8\geq 0$ та $a-1\neq 0$.

8. З теореми Вієта маємо а) $x_1x_2^2+x_2x_1^2=-5$; б) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=-\frac{41}{8}$.

9. $a=6$.

10. Значення виразу= $\left(\frac{1}{(t+3)(t+2)}+\frac{2t+2}{(t+4)(t+2)}+\frac{1}{(t+3)(t+4)}\right)^2\cdot\frac{(t+4)^2}{2}=2.$

11. $y=\frac{x^2+x-2}{x-1}-\frac{x^2-6x+9}{3-x}=2x-1,\ x\neq 1,\ x\neq 3.$