

Завдання 2. Лінійні рівняння та системи

Основні теоретичні відомості

Алгоритм розв'язування лінійних рівнянь з параметрами

Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b – деякі відомі числа, а x – змінна, називають **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ – єдиний корінь рівняння;

якщо $a = 0$ і $b \neq 0$ – рівняння коренів немає;

якщо $a = 0$ і $b = 0$ – рівняння має безліч коренів.

Модулі

Нехай a – деяке задане дійсне число, $f(x)$, $g(x)$ – функції від x . З означення модуля є справедливими наступні схеми розв'язання рівнянь із модулями.

1. Рівняння $|f(x)| = a$ при $a < 0$ не має розв'язку, при $a \geq 0$ еквівалентне

сукупності $\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$

Очевидно, що при $a = 0$ остання сукупність еквівалентна рівнянню $f(x) = 0$.

2. Рівняння $|f(x)| = |g(x)|$ рівносильне сукупності рівнянь $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$.

3. Рівняння $|f(x)| = g(x)$ еквівалентне системі $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Завдання

1. Розв'яжіть: 1) $1\frac{2}{3}\left(2\frac{4}{5} - 15x\right) + 29\frac{1}{9} = -\frac{8}{9} - \left(8x - \frac{2}{3}\right)$; 2) $x(3-x)(5x+10) = 0$.

2. Вранці вкладник зняв з рахунку в банку $\frac{2}{7}$ усіх грошей, а після обіду – 30% залишку. Після цього на його рахунку залишилося 175 грн. Який був початковий вклад?

3. Магазин придбав олівці у коробках у виробника за певну ціну. Тепер він їх продає або по 10 гривень за одну коробку, або по 20 гривень за 3 коробки. Виявилось, що прибуток при продажі однієї коробки олівців та при продажі трьох коробок олівців – однаковий. За якою ціною магазин придбав олівці у виробника?

4. Розв'язати рівняння: 1) $|2x^2 + 3x - 9| + 6 = 1$; 2) $\|x| - 2| = 1$; 3) $\|x| + 3| = 2$;

4) $\left| \left| |x| - 16 \right| - 3 \right| - 5 = 6$; 5) $|x+2| = 2x+7$; 6) $|x+3| = 4-2x$.

5. Розв'яжіть рівняння: $(x-1) \cdot |x^2+1| + |x-1| \cdot (x^2+1) = 0$.

6. Розв'язати рівняння: а) $|x+1| + |x-2| = 3$; б) $|x-2| - |x-4| = 6$.

7. Розв'язати рівняння при кожному значенні параметра a :

1) $a(x+3) = 3a$; 2) $(a^2-9)x = a+3$; 3) $a(5x-7) = x+3$;

4) $x(x+3) - x(x+6) = 3a - 9 - ax$.

8. При яких цілих значеннях a корінь рівняння $x+7a=9$ є цілим числом, що ділиться на 2?

9. Знайти найменше значення виразів: а) $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 19$;

б) $|x-3| + y^2 - 8y + 36$. Вказати при яких x і y такі значення досягаються.

10. Розв'язати систему: 1) $\begin{cases} x+2y=5, \\ x-2y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x+2y=0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+6y=10, \\ 3x-y=2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 4y-2x=3 \end{cases}$.

11. Побудуйте графік рівняння:

1) $2x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 9 = 0$; 3) $(x+1)(y-2) = 0$;

2) $|y-3| + x^2 + 1 = 2x$; 4) $6xy - 9x = 0$.

5) $xy + x + y + 1 = 0$.

12. Загадано два числа. Різниця потроєного першого і другого дорівнює 23. Якщо до першого додати 7, а друге збільшити в два рази, то сума «нових» чисел рівна 11. Знайти ці числа.

13. Сплав заліза та олова загальною масою 6 кг містить 85 % олова. Скільки заліза треба додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, що містить 68 % олова?

14. Скільки треба взяти 20% розчину оцтової кислоти і 45% розчину цієї кислоти, щоб утворилося 1000 г 30% розчину?

15. Школярка Оксанка у 2019 році мала вік, який дорівнював потроєній сумі цифр її року народження. Точно таку властивість щодо віку має й її дідусь Остап – у 2019 році його вік дорівнює потроєній сумі цифр року його народження. Скільки років мав дідусь Оксанки, коли вона народилася?

16. На озері плавали лебеді, відношення кількості білих лебедів до чорних складає 5 : 2. В одну мить в небо піднялися та полетіли з озера 25% білих та 15% чорних лебедів. Яка найменша кількість лебедів могла бути на озері з самого початку?