

Завдання 3. Раціональні вирази

Завдання

1. Спростити: 1) $\frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}$; 2) $\left(\frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{x^3-8} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x}\right)$.

2. Спростити вираз: $A = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

3. Дві труби, працюючи разом, можуть наповнити басейн за 8 годин. При цьому перша труба наповнює басейн у 4 рази повільніше, ніж друга. За який час може наповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно?

4. Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $-3y$; 2) $\frac{8}{2x-6y}$; 3) $\frac{18y-6x}{9}$; 4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$

5. Відомо, що $a^3 + 7a - 9 = 0$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2a^3+3a}{11a-18}$; 2) $\frac{2a^4+14a^2-17a+3}{2a+6}$.

6. Ненульові числа a, b задовольняють умови: $6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25$. Чому

може дорівнювати значення виразу $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$?

7. Відомо, що $\frac{x-3y}{y} = 4$. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-4y^2}{5xy+y^2}$.

8. Відомо, що $\frac{4x+3y}{7x-y} = 2$. Знайти значення виразу: $\frac{-x^4+x^2y^2+3y^4}{3x^4+2x^3y+6x^2y^2-y^4}$.

9. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(x; y)$, що задовольняють рівність:

$$\frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2} = 3.$$

10. При яких цілих значеннях $n \in \mathbb{Z}$ значення дробу:

1) $\frac{2n^2+7n-4}{n+3}$; 2) $\frac{4n^2-11n+23}{n-2}$?

11. Знайдіть значення суми: $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{11}{5^2 \cdot 6^2}$.

12. Відомо, що $a - \frac{1}{a} = 9$. Знайдіть значення виразу $a^2 + \frac{1}{a^2}$.

13. Відомо, що $a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$. Знайдіть значення виразу $a - \frac{1}{a}$.

14. Числа a, b, c такі, що $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$. Знайдіть значення виразу $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

15. Побудувати графіки рівнянь: 1) $\frac{x^2y^2-9}{(x+3)(y-2)} = 0$; 2) $\frac{(xy-6)(x^2-y^2)}{6x-y} = 0$;

3) $y = \left(\frac{3}{x} - \frac{6}{x+3}\right)\left(3 + \frac{x^2+9}{x-3}\right): x$.

16. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння:

1) $\frac{a(x+a-1)(x-2a)}{x-3} = 0$; 2) $\frac{(a-3)(x-a)(x+2)}{(x+3a+2)(x-a+1)} = 0$.